2次関数No2.「平行移動」

今回は２次関数の第２回、平行移動を解説します。平行移動については、次のことを覚えてください。

平行移動

曲線 $y = f(x)$ を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の方程式は $\boldsymbol{y - q = f(x - p)}$ となる。

上記が「なぜ成立するか？」ですが、これは第１回の「対称移動」を理解していたら簡単だと思いますよ。

まず、曲線 $f = f(x)$ 上の点 (x, y) を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動した点を (X, Y) とします。

なら、当然 $x + p = X, y + q = Y$ ってなるよね。これより、$x = X - p, y = Y - q$ です。これらを $y = f(x)$ に代入すると、$Y - q = F(X - p)$ です。

よって、平行移動した曲線の方程式は $y - q = f(x - p)$ です。

＊ $Y - q = F(X - p)$ で、Y は y に、X が x になりました。こうしていい理由は、２次関数の第１回「http://www.hmg-gen.com/2jino1.pdf」で解説しています。

では、今覚えたことを使って次の問題を解いてみてください。

問題 1

関数 $y = 2x^2 - 4x + 1$ で表された曲線を x 軸方向に $+2$, y 軸方向に -1 平行移動させたときの曲線の方程式を求めよ。

【解説】

この問題は、上の赤枠でくくった「平行移動」を使うだけです。x 軸方向に $+2$、y 軸方向に -1 なので x を $x-2$ を y を $y-(-1)$ に置き換えるだけです。

【解答】

曲線 $y = 2x^2 - 4x + 1$ を x 軸方向に $+2$, y 軸方向に -1 平行移動させた曲線の方程式は以下のようになる。

$y-(-1) = 2(x-2)^2 - 4(x-2) + 1$ ◀ x を $x-2$ と、y を $y-(-1)$ と置き換えた

$$
\begin{aligned}
y + 1 &= 2(x^2 - 4x + 4) - 4(x-2) + 1 \\
y &= 2x^2 - 8x + 8 - 4x + 8 \\
&= 2x^2 - 12x + 16
\end{aligned}
$$

よって、求める曲線の方程式は $\boldsymbol{y = 2x^2 - 12x + 16}$

平行移動は単純にさっきやったように解けばよいので、簡単だよね。今回は 2 次関数で説明していますが、この $y-q = f(x-p)$ の平行移動は 2 次関数だけでなく、すべての関数の平行移動について成り立ちます。

平行移動は上記を使えば必ず解くことができます。ただ、2 次関数の平行移動では、頂点を考えて解く方法もあります。

$y = a(x-s)^2 + t$ っていう 2 次関数の頂点は (s, t) これを x 軸方向に $+p$ 、y 軸方向に $+q$ 平行移動すると頂点が $(s+p, t+q)$ ってなるよね。これより $y = a(x-s)^2 + t$ を平行移動すると $y = a\{x-(s+p)\}^2 + (t+q)$ となります。

では、この頂点を使って平行移動する解き方を使って問題１を解いてみます。

【別解】

$y = 2x^2 - 4x + 1 = 2(x-1)^2 - 1$ より放物線の頂点は $(1, -1)$、この放物線を x 軸方向に $+2$、y 軸方向に -1 平行移動させたときの頂点は $(1+2, -1-1) = (3, -2)$ にうつる。よって求める２次関数の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2(x-3)^2 - 2 \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) - 2 \\ &= \mathbf{2x^2 - 12x + 16} \end{aligned}$$

◀ これが答え

２次関数の平行移動に関しては上記のように２通りあります。$y - q = f(x - p)$ を使う解き方と、頂点を使って求める方法どちらが簡単かは問題によって違ってきます。２次関数の平行移動を問題を解くときは、解く前にどっちの解法が簡単か考えてから解くようにしてください。

今回の最後の問題、平行移動と対称移動の融合問題です。対称移動に関しては、前回解説しました。もし分からないという人は、「２次関数 No1.『対称移動』」http://www.hmg-gen.com/2jino1.pdf を見ておいてください。

問題２

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に $+2$ 平行移動し，さらにそれを x 軸対称移動したところ放物線 $y = 2x^2 + x + 1$ が得られた。このとき，a, b, c の値をそれぞれ求めよ。

【解説】

この問題を解いてみてというとほとんどの人が、放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を x 軸方向に -2、y 軸方向に $+2$ 平行移動したものは $\cdots$、って解くと思います。もちろんこれでも解けないことはないんだけど $y = ax^2 + bx + c$ は文字式だから式変形するのは少しメンドウになる。

そこで、逆から考えていきます。つまり $y = 2x^2 + x + 1$ の方から式変形していきます。

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を x 軸方向に -2、y 軸方向に $+2$ だけ平行移動して、さらにその放物線を x 軸に関して対称移動したら放物線 $y = 2x^2 + x + 1$ になるんだよね。

これを逆から考えれば放物線 $y = 2x^2 + x + 1$ を x 軸に関して対称移動して、さらに x 軸方向に $+2$、y 軸方向に -2 だけ平行移動したら放物線 $y = ax^2 + bx + c$ になってくれます。
今回の問題はこれを使って解いていきます。

【解答】

放物線 $y = 2x^2 + x + 1$ を x 軸対称移動して、さらにそれを x 軸方向に $+2$、y 軸方向に -2 だけ平行移動した放物線の方程式が $y = ax^2 + bx + c$ となる。

放物線 $y = 2x^2 + x + 1$ を x 軸対称移動すると、

$-y = 2x^2 + x + 1$ ◀ $y = f(x)$ を x 軸対称移動すると $-y = f(x)$ より
放物線 $y = -2x^2 - x - 1$ となる。

また、放物線 $y = -2x^2 - x - 1$ を x 軸方向に $+2$、y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

$y - (-2) = -2(x - 2)^2 - (x - 2) - 1$ ◀ y を $y - (-2)$、x を $x - 2$ に置き換えた

$y + 2 = -2(x^2 - 4x + 4) - (x - 2) - 1$

$y = -2x^2 + 8x - 8 - x + 2 - 1 - 2$

$= -2x^2 + 7x - 9$ ◀ これが $y = ax^2 + bx + c$ と一致

よって、$\boldsymbol{a = -2, b = 7, c = -9}$

今回は文字式を変形するのは面倒だからと違う方法を考えました。これは意外によく出てきます。数学は同じ問題でも問題の解き方によってまったく計算量が違ってくるということが多いです。

問題を解いていて、解法が思いついたとしても、その解法の計算が面倒なもの（面倒そう）なものであったら、いきなりその解法で解いていくのではなくて、少しだけでいいのでほかにもっと簡単な解法がないかと考えるクセをつけるようにしておいてください。
今後、この考え方は本当に重要になってきます。

平行移動はこれでおしまいです。2 次関数の問題で平行移動が出題されるときは、問題 2 と同じように対称移動と融合問題として出題されることが多いです。プリントをやってもらって分かったと思いますが、本当に簡単です。センター試験等、受験ではよく出題されるところなのでしっかりと理解しておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司