２次関数No.3「２次関数の決定」

こんにちは河見賢司です。今回は、２次関数の第３回。「２次関数の決定」に関する問題を解説します。

２次関数の決定は、おもに３通りあります。まずは、次のことを覚えてください。

２次関数の決定

① 頂点に関する何らかの情報が与えられているときは、$y = a(x-p)^2 + q$ を使って解いていく。

② 通る点３点が与えられているときは、$y = ax^2 + bx + c$ を使って解いていく。

③ $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ を通ると x 軸との２交点が与えられている問題では、$y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ を使って解いていく。

では、これを使って問題を解いていってもらいます。

問題

次の条件を満たす２次関数を求めよ。

(1) 頂点が $(2, 3)$ で点 $(0, 1)$ を通る。

(2) ２点 $(1, -8)$, $(2, -2)$ を通り、x 軸に接する。

(3) 頂点の x 座標が１で、２点 $(-1, -5)$, $(2, 1)$ を通る。

(4) $y = 3x^2$ を平行移動したもので頂点が $y = 2x + 1$ 上にあり，点 $(1, 3)$ を通る。

(5) ３点 $(1, 4)$, $(3, 6)$, $(-2, 16)$ を通る。

(6) ３点 $(4, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -4)$ を通る。

(1)
【解説】
頂点が $(2, 3)$ と頂点に関する情報が与えられているので赤枠の ① のパターンで、$y = a(x-p)^2 + q$ を使って解いていきます。今回は、頂点が $(2, 3)$ なので $y = a(x-2)^2 + 3$ とおくことができます。

【解答】
頂点が $(2, 3)$ より。求める２次関数を $y = a(x-2)^2 + 3$ とおく。

$y = a(x-2)^2 + 3$ は $(0, 1)$ を通るので、

$$1 = a(0-2)^2 + 3$$
$$1 = 4a + 3$$
$$4a = -2$$
$$a = -\frac{1}{2}$$
$$\therefore y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$$ ◀ これが答え

(2)
【解説】
今回の問題は、まず「x 軸に接する」という表現に着目して下さい。x 軸に接するということは、頂点の y 座標が 0 ということです。

今回も頂点の情報が与えられているので赤枠の ① のパターンです。頂点の y 座標が 0 なんだから頂点を $(p, 0)$ とでもおくと、求める 2 次関数は $y = a(x-p)^2$ とすることができます。

問題を解くときに次のタイプの方程式を解くことになります。よく出る形なので覚えておいてください。

方程式の解法

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C} \Rightarrow BC = AD$$

$\frac{B}{A} = \frac{D}{C} \Rightarrow BC = AD$ は知らない人が多いですけど、意外によく出てくるので覚えておいてください。(分数) = (分数) の方程式が出てきたら利用するものと思ってください。証明は簡単にできますが、一応書いておきますね。

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$$

両辺に AC をかけると ◀ 分数は考えにくいので、分数を消すため

$$\frac{B}{\cancel{A}} \cdot \cancel{A}C = \frac{D}{\cancel{C}} \cdot A\cancel{C}$$

$BC = AD$ ◀ 証明終了！

以上のことを踏まえ問題を解いていきます。

【解答】
x 軸に接するので、求める 2 次関数は $y = a(x-p)^2$ とおける。

$(1, -8)$ を通るので
$-8 = a(1-p)^2 \cdots$ ①

$(2, -2)$ を通るので
$-2 = a(2-p)^2 \cdots$ ②

①, ② より

$$\frac{-8}{-2} = \frac{a(1-p)^2}{a(2-p)^2}$$ ◀ 下の（注）を見よ

$$\frac{\cancel{-8}}{\cancel{-2}} = \frac{\cancel{a}(1-p)^2}{\cancel{a}(2-p)^2}$$

$$\frac{4}{1} = \frac{(1-p)^2}{(2-p)^2}$$ ◀ 約分をした

$4(2-p)^2 = (1-p)^2$ ◀ $\frac{B}{A} = \frac{D}{C} \Rightarrow BC = AD$ より

$4(p^2 - 4p + 4) = p^2 - 2p + 1$

$3p^2 - 14p + 15 = 0$

$(p-3)(3p-5) = 0$

$p = 3, \frac{5}{3}$

$p = 3$ のとき、① に代入 $-8 = a(1-3)^2 \Rightarrow a = -2$
$p = \frac{5}{3}$ のとき、① に代入 $-8 = a(1 - \frac{5}{3}) \Rightarrow a = -18$

以上より、求める 2 次関数は $y = -2(x-3)^2$, $y = -18(x - \frac{5}{3})^2$

（注）

$$\begin{cases} -8 = a(1-p)^2 & \cdots\cdots\cdots ① \\ -2 = a(2-p)^2 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$ について

連立方程式は中学校の時のことを少し思い出して欲しいんだけど、加減法や代入法があったと思います。２元連立方程式の場合、１文字消去してあるひとつの文字のみにするのが連立方程式の解き方の基本だったと思います。

今回も、連立方程式だから ①, ② の 2 式から 1 文字消去して解いていくことが基本です。

こういったタイプは分数をとると、うまくいきます。また、なぜこうして OK か分からない人が多いから一応かいておきます。

$A = B$ かつ $C = D$ ならば $\dfrac{A}{C} = \dfrac{B}{D}$ ただし $C \neq 0,\ D \neq 0$

上記はあきらかだよね左辺と右辺を見比べてほしいんだけど $A = B$ なんだから左辺と右辺の分子同士が等しい、また $C = D$ なんだから左辺と右辺の分母同士が等しい。だから、成立。分母に 0 がくることができないので $C \neq 0,\ D \neq 0$ という条件が必要です。

では、(3) に進みます。

(3)
【解説】
頂点の x 座標が 1 と、頂点に関する情報が与えれているので赤枠のパターン ① のタイプの問題です。

【解答】
頂点の x 座標が 1 なので、求める 2 次関数を $y = a(x-1)^2 + q$ とおける。

$(-1, -5)$ より
$-5 = a(-1-1)^2 + q$
$4a + p = -5 \cdots ①$

$(2, 1)$ より
$1 = a(2-1)^2 + p$
$a + p = 1 \cdots ②$

①, ② を連立して $(a, q) = (-2, 3)$

よって求める 2 次関数は $y = -2(x-1)^2 + 3$

(4)
【解説】
少し難しそうだけど、それほど難しくないですよ。問題の最初の条件 $y = 3x^2$ を平行移動したものの扱い方は分かるかな？平行移動の公式 $y = f(x) \ \to y - q = f(x - p)$ を考えれば明らかだと思うけど、2 次関数を平行移動しても x^2 の係数は変わらない。逆から言うと、2 次関数の形は x^2 の係数で決まる。

今回の問題では、必要ありませんが 2 次関数の概形は、x^2 の係数で決まるということを覚えておいてください。

後は、頂点が $y = 2x + 1$ 上にあるんだから、頂点の x 座標を p とおけば頂点の y 座標は $2p + 1$ となります。

このことより、求める２次関数は $y = 3(x - p)^2 + p + 1$ とおくことができます。

【解答】
$y = 3x^2$ を平行移動させたものだから x^2 の係数は3、また頂点の x 座標を p とすると頂点は $y = 2x + 1$ 上にあるので、頂点の y 座標は $2p + 1$ となる。このことより、求める２次関数は $y = 3(x - p)^2 + 2p + 1$ とおける。

この２次関数が $(1, 3)$ を通るので

$$3 = 3(1 - p)^2 + 2p + 1$$

$$3 = 3(p^2 - 2p + 1) + 2p + 1 \quad (p = 1)(3p - 1) = 0$$

$$3 = 3p^2 - 6p + 3 + 2p + 1$$

$$p = 1, \frac{1}{3}$$

$p = 1$ のとき、求める２次関数は $y = 3(x - 1)^2 + 3$
$p = \frac{1}{3}$ のとき、求める２次関数は $y = 3(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{5}{3}$

(5)
【解説】
今回は、頂点に関する情報が何も与えられてなく、通る点３点が与えられているので赤枠のパターン ② の $y = ax^2 + bx + c$ とおいてといていきます。

通る点３点が与えれているので、それらを $y = ax^2 + bx + c$ に代入することで得られる式を連立して解いていけばいいだけの問題です。

３元連立（変数が３つの方程式）の方程式の解法の基本は、式をうまく式変形して２元連立（変数が２つ）にしてからといていくことです。

今回の場合

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \cdots ① \\ 9a + 3b + c = 6 \cdots ② \\ 4a - 2b + c = 16 \cdots ③ \end{cases}$$

② − ① と ③ − ① をしたら変数の c が消えて変数が a, b のみになってくれるので、こうやって連立方程式を解いていきます。

【解答】
求める2次関数を$y = ax^2 + bx + c$とおく。$(1, 4)$より$4 = a + b + c \cdots$①
$(3, 6)$より$6 = 9a + 3b + c \cdots$②
$(-2, 16)$より$16 = 4a - 2b + c \cdots$③

② − ①より
$2 = 8a + 2b \Rightarrow 4a + b = 1 \cdots$④

③ − ①より
$12 = 3a - 3b \Rightarrow a - b = 4 \cdots$⑤

④と⑤を連立して$(a, b) = (1, -3)$

また①に$(a, b) = (1, -3)$を代入して計算すると$c = 6$

よって求める2次関数は$y = x^2 - 3x + 6$となる。

(6)
【解説】
この問題も3点を通る問題だから(5)と同じように$y = ax^2 + bx + c$とおいて解いてもらってもいいんだけで、さっき(5)を解いてもらって分かったと思うけど、3元連立は面倒なんだ、だからできるだけしたくない$\cdots$

そこで、この問題よく見てほしいんだけど、これは$(4, 0)$, $(1, 0)$を通るって言ってるんだよね。つまり、x軸との交点は$x = 1, 4$だから、この2次関数は$y = a(x - 1)(x - 4)$っておけるんじゃない？

なぜ$y = a(a - 1)(x - 4)$ってなるか分からない人は、逆から考えてみて$y = ◯\,(x - 1)(x - 4)$とx軸との交点は？ってきかれたら$x = 1, 4$ってすぐに分かるよね。◯の部分は何がきてもいい。

x軸との交点が$x = \alpha, \beta$の2次関数は$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$とおけるということを覚えておいてください。では、解答に進みます。

【解答】
求める2次関数は$(4, 0)$, $(1, 0)$を通るので、$y = a(x - 4)(x - 1)$とおける。

この2次関数が$(0, -4)$を通るので、

$-4 = a(0-4)(0-1)$
$a = -1$

よって求める２次関数は
$y = -(x-4)(x-1)$
$\quad = -x^2 + 5x - 4$

これで２次関数第３回「２次関数の決定」は終わりです。しっかりと勉強しておいてください。

河見賢司

少し難しいと解けなくなる人のための高校数学勉強法
http://www.hmg-gen.com/

メールアドレスです。何か感想をくれると嬉しいです。
magdai@hmg-gen.com