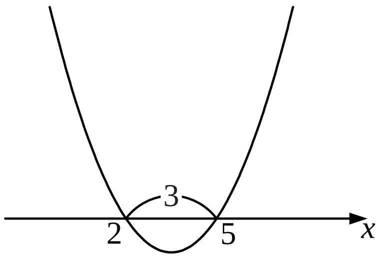
２次関数No. ４
「２次関数が x 軸から切り取る線分の長さに関する問題」

今日は２次関数の第４回、「２次関数が x 軸から切り取る線分の長さに関する問題」です。

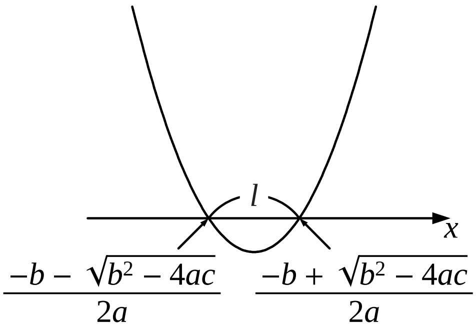
「２次関数が x 軸から切り取る線分の長さ」って言われてもよく分からない人もいると思います。

例えば $y = (x - 2)(x - 5)$ という２次関数が x 軸から切り取る線分の長さは、下図のようのように３となります。



「２次関数が x 軸から切り取る線分の長さに関する問題」はどう解くかと言うと、単純に解の公式で x 軸との交点を出してもらって、解の大きい方から小さい方を引くだけです。計算的に少し面倒かもしれませんが、互いに打ち消しあってくれるのでそれほど難しくありません。ワンパターンで解けるので、よく覚えておいてください。

2次関数が x 軸に切り取られる線分の長さ



2次関数が x 軸によって切り取られる線分の長さ l は、上図のようになるので

$$l = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

⇑数直線上における線分の長さは大きい方から小さい方を引けば求められる

$$= \frac{2\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

このことを踏まえて次の問題を解いてください。

問題

2次関数 $y = x^2 - 12x + a$ が x 軸に切り取られる線分の長さが8である。このとき定数 a の値を求めよ。

【解説】

この問題は、これまで説明してきたことを考えれば簡単だと思うので、いきなり解答に進みます。

【解答】

$x^2 - 12x + a = 0$ の2解を α, β ただし $\alpha < \beta$ とする。

解の公式より $\alpha = 6 - \sqrt{36-a}$, $\beta = 6 + \sqrt{36-a}$

2次関数 $y = x^2 - 12x + a$ が x 軸に切り取られる線分の長さを l とする。

$$l = \beta - \alpha$$

$$= 6 + \sqrt{36-a} - \{6 - \sqrt{36-a}\}$$

$$= 2\sqrt{36-a}$$

$l = 8$ より

$$2\sqrt{36-a} = 8$$

$$\sqrt{36-a} = 4$$

$$36 - a = 16$$ ◀ 両辺２乗した（注）

$$-a = -20$$

$$a = 20$$ ◀ これが答え

（注）上記で何気なく２乗したけど、２乗する時は必ず同値性に注意しないといけません。次の方程式を解いてみてください。

問題

$\sqrt{6-x} = x$ を解け。

有名な誤答例

$$\sqrt{6-x} = x$$

$$6 - x = x^2$$ ◀ 両辺を２乗した

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x-2)(x+3) = 0$$

$$x = 2, -3$$

上記は、どこが間違っているか分かる？
実は、両辺を２乗したところ $\sqrt{6-x} = x \Leftrightarrow 6 - x = x^2$ のところが間違っているんだ。

$\Leftrightarrow$っていうのは $\Leftarrow$ と $\Rightarrow$ の両方が成立して初めて成り立つんだけど、
$\sqrt{6-x} = x \Rightarrow 6 - x = x^2$ は成立するけど、$\sqrt{6-x} = x \Leftarrow 6 - x = x^2$ は成立しないよ。

$6 - x = x^2$ を解くと、$\pm\sqrt{6-x} = x$ だよね？$+\sqrt{6-x}$ だけならいいけど、余分な $-\sqrt{6-x}$ が入ってくるのでこのときは成立しない。

マイナスが入ってきたらダメなんだから、マイナスを除けば同値性が保たれるよね？だから、$\sqrt{6-x} = x \Leftrightarrow 6 - x = x^2$ かつ $x \geqq 0$ となります。

では、解答に進みます。

【解答】

$\sqrt{6-x}=x$

$\Leftrightarrow 6-x=x^2$ かつ $x \geqq 0$ (注) $6-x=x^2$ を x について解くと $\pm\sqrt{6-x}=x$ だが $x \geqq 0$ も同時に満たすには $x=-\sqrt{6-x}$ は不適となり $x=\sqrt{6-x}$ となり同値性をみたす

$x^2+x-6=0$, かつ $x \geqq 0$

$(x-2)(x+3)=0$, かつ $x \geqq 0$

$x=2, -3$ かつ $x \geqq 0$

$x=2$ ◀ $x=-3$ は $x \geqq 0$ より不適

方程式や不等式を解くとき、何気なく解いている人が多いと思うけど、常に同値変形に気を使いながら解かないといけません。同値変形とは ⇔ が成立していることです。

でも、常に同値性に注意しながら解いていたら時間がかかって仕方がないです。普通に計算していても、同値性はほとんどの場合保たれます。同値性が保たれないパターンもいくつかありますが、２乗する時が一番有名なパターンと言ってもよいと思います。２乗するときは、同値性が保たれているか特にしっかりと考えるようにしてください。

有名な同値変形

$A=\sqrt{B}$

$\Leftrightarrow A^2=B$ かつ $A \geqq 0$

今回はこれで終了です。「２次関数が x 軸に切り取られる線分の長さ」センター試験でもたまに出題されますが、日本語の意味さえ分からないという人が多いので、わざわざプリントを作りました。知っている人にとっては、ごくごく簡単な内容だったと思います。

最後の方で、少し同値性の話をしました。高校数学において本当に基礎的な事柄ですが、理解できていない人が意外なほど多いです。学校の教科書なんかでも同値変形の単元ってないですよね。でも、本当に重要です。今後機会を見て、他の同値変形も紹介していきたいと思います。がんばってください。

河見賢司

「少し難しくなると解けなくなる人のための高校数学勉強法」
http://www.hmg-gen.com/

何か感想をもらえると嬉しいです。
メールアドレス：magdai@hmg-gen.com