2 次関数No.5「判別式」

こんにちは河見賢司です。今回は 2 次関数の第 5 回「判別式」です。

判別式については次のことを覚えてください。

判別式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とするとき

(i) $D>0$ のとき、2 次方程式は異なる 2 つの実数解をもつ。

(ii) $D=0$ のとき、2 次方程式は一つの解をもつ。（重解をもつ）

(iii) $D<0$ のとき、2 次方程式は実数解をもたない。

判別式については上記の赤枠はほとんどの人が覚えているけど、なぜこうなるか知らない人が多いので一応説明しておきます。

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解の公式を使って解くと $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ となって、判別式 $D=b^2-4ac$ は、解の公式を使ったときのルートの中身と一致するよね。

$D>0$ のときは、$x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ という 2 つの解が存在します。このことより $D>0$ のとき、異なる 2 つの実数解が存在します。

$D=0$ のときは、解の公式は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の $D=b^2-4ac=0$ より
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}\Rightarrow x=-\dfrac{b}{2a}$ となるので、2 次方程式の解は $x=-\dfrac{b}{2a}$ が一つのみ存在することになります。

$D<0$ のときは、$D=b^2-4ac<0$ となりますが、このとき解の公式のルート中がマイナスとなります。ルートの中がマイナスとなるような実数は存在しないから、
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ をみたすような a,b,c は存在しません。よって、解なしとなります。

判別式の問題に実際に進む前に 2 次不等式について簡単に解説したいと思います。まず

は次の補題を解いてみてください。

補題

$(x-1)(x-2)<0$

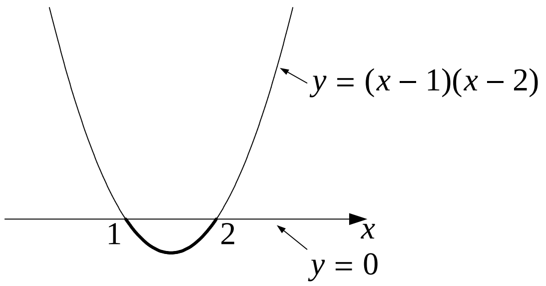
ほとんどの人が一瞬で $1<x<2$ って解けたと思うけど、なぜこうなるか理由をしらない人が多いので、説明します。

今後、不等式はいろいろな場面ででてきます。不等式は数式そのもので考える方法と、グラフで考えるという手法があります。どちらも理解してもらわないといけませんが、今回はグラフで考える手法を紹介します。

グラフで考える手法は、視覚的に理解することができます。

では、実際にこの手法で先ほどの補題 $(x-1)(x-2)<0$ を解いていきます。

まず、$(x-1)(x-2)<0$ っていうのはどういうことかというと、$y=(x-1)(x-2)$ っていうグラフと $y=0$ というふたつのグラフをかいたとき $y=(x-1)(x-2)$ のグラフの方が $y=0$ のグラフより下側にあるということです。



上図を見てもらえば分かると思いますが、$y=(x-1)(x-2)$ のグラフの方が $y=0$ のグラフより下側にあるのはグラフの太線部分です。この太線部分をみたす x の値の範囲が $1<x<2$ なので、$(x-1)(x-2)<0$ の答えは $1<x<2$ となります。

このことを理解した上で次の問題に進んでください。

問題

2 次方程式 $x^2+(k+2)x+3k-2=0$ の解の個数を判別せよ。

【解説】
この問題は、判別式を使って解いていくだけです。

【解答】
$x^2+(k+2)x+3k-2=0$ の判別式を D とする。

$D=(k+2)^2-4\cdot 1\cdot(3k-2)$ ◀ $D=b^2-4ac$ より

$=k^2+4k+4-12k+8$

$=k^2-8k+12$

$=(k-2)(k-6)$

(i) $D>0$ つまり $k<2,\ 6<k$ のとき異なる 2 つの実数解をもつ。

(ii) $D=0$ つまり $k=2,\ 6$ のときひとつの実数解（重解）をもつ。

(iii) $D<0$ つまり $2<k<6$ のとき実数解は存在しない。

(注) 上の不等式もグラフを使って解くようにしてください。

今回のプリントはこれで終わりです。今回のところは簡単なので理解できている人も多かったと思います。でも、なぜ $D>0$ のとき、異なる 2 つの実数解をもつかということやグラフを使った不等式の解き方は知らなかったという人も多いと思います。簡単なところですが、本当に重要なところなのでしっかりと勉強しておいてください。

河見賢司

少し難しくなると解けなくなる人のための高校数学勉強法
http://www.hmg-gen.com/

何か感想をくれると嬉しいです。
メールアドレス　magdai@hmg-gen.com