２次関数No. 6
「最大値と最小値について」

こんにちは、河見賢司です。今回は、２次関数の第６回で、関数の最大値、最小値問題の初歩の初歩を話したいと思います。

内容としてはごくごく簡単なことですが、意外に理解できていない人も多いと思います。簡単なプリントですが、ぜひとも目を通して欲しい内容です。それでは、がんばってください。

いきなりですが、次の問題を解いてください。

問題１

関数 $y = 2x + 1$ の $(-1 \leqq x \leqq 2)$ における最大値と最小値を求めよ。

【解説】

この問題は次のように解く人が多いです。

解答

$x = -1$ を $y = 2x + 1$ に代入して $y = -1$、$x = 2$ を $y = 2x + 1$ に代入して 5

よって、最小値は $\mathbf{-1}$、最大値は $\mathbf{5}$ となる。

まあ、上記のような答案でも間違いではないんですが、しっかりと理解した上で上記のような答案を書いているのならいいのですが、適当にしか理解できていない人も多いんです。

では、次の問題を解いてみてください。この問題は中学生のときに何回か解いた問題だと思います。

問題 2

関数 $y = x^2$ の $(-1 \leqq x \leqq 2)$ における最大値と最小値を求めよ。

【有名な誤答例】

$x = -1$ を $y = x^2$ に代入すると $y = 1$、$x = 2$ を $y = x^2$ に代入すると $y = 4$

よって、最小値は **1**、最大値は **4**

上記の答案はどこが間違っているか分かる？中学生の内容なので分かっていると言う人も多いと思いますが、一応説明しておきます。

この場合の最大値、最小値とは $-1 \leqq x \leqq 2$ の値の範囲のとき、y の値はどこからどこまでになるかということです。

y の値の範囲ですが、頭の中で考えているとどうしても間違いやすいです。ですが、グラフをかくと視覚的にみることができるので間違いが減ります。ですから、最大値、最小値問題はグラフをかいて考えるようにしてください。本当に重要なので、まとめておきます。

関数の最大値・最小値問題の考え方

関数の最大値、最小値の問題ではグラフをかいて考えることが多い！

(注) 関数の最大値・最小値問題でもグラフを描いて考えるのではなく、相加相乗平均など不等式で考える最大値、最小値問題などもあります。関数の最大値、最小値の問題で一番出題頻度の高い解法は、グラフを描いて解く解法です。

高校生には、「関数の最大値、最小値問題はグラフをかいて考えるんだよ」と何度も言っていますが、「面倒だから」「頭で考えても分かるから」と言ってグラフをかかない人がいます。確かに、慣れてきたらグラフをかかなくてもできるかもしれませんが、慣れるまでは毎回グラフをかいて考えるべきですよ。

数学って、考える科目と思っている人も多いですが、スポーツと同じく何回も同じことをして体に数学の解き方自体を浸透させていくことが重要です。それができてはじめて数学的な考え方ができるようになります。ですから、グラフは少々面倒でも必ずかくようにしてください。

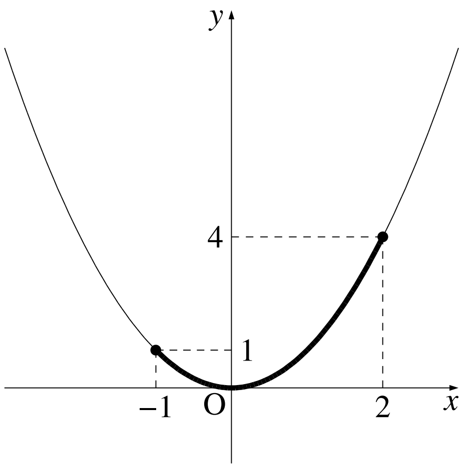
それでは、問題に戻ります。少し間が空いたのでもう一度問題をかいておきます。

問題２

関数 $y = x^2$ の $(-1 \leqq x \leqq 2)$ における最大値と最小値を求めよ。

【解説】

関数の最大値、最小値はグラフをかいて考えるんだったよね？まずは、グラフをかいてから考えていくことにします。



上図は $y = x^2$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲を太線にしてグラフをかいたんだけど、$-1 \leqq x \leqq 2$ で y の値の範囲はどう変化しているか分かる？

y は高さなんだから、一番低くなっているのは $x = 0$ のときで、このとき $y = 0$ です。反対に、一番高くなっているのは $x = 2$ のときで、$y = 4$ です。

ですから、y の値は $0 \leqq y \leqq 4$ です。このことより、最大値は 4 $(x = 0$ のとき$)$、最小値は 0 $(x = 0$ のとき$)$ となります。

繰り返しになりますが、このくらいならグラフをかいて解かないでも大丈夫と思う人もいると思います。まあ、「絶対にグラフをかいて解いていけ」とはいいませんが、「関数

の最大値、最小値問題はグラフをかいて考える」ということは必ず頭の中に叩き込んでおいてください。

それでは、このことを頭に入れて以下の問題を解いてください。どれも、関数の最大値、最小値問題だからグラフをかいて考えていきます。

少し話がそれますが、２次関数を見たらなんでもかんでも平方完成をする人がいます。平方完成をしてしまった生徒に「どうして平方完成をしたの？」と聞くと「イヤ、なんとなく」なんて答えることが多いです。

平方完成はなぜするかと言えば、２次関数のグラフの頂点を求めたいからです。頂点を求めないと２次関数のグラフはかけないので、グラフをかくときにも当然、平方完成をします。

「２次関数で平方完成をするのは、頂点を求める時やグラフをかくときだけ」ということを頭に入れておいてください。

今後、高校数学を勉強していくにあたり、どんどんと複雑になってきます。「頭が混乱します」と言う人がいます。確かに覚えることが多く混乱してしまうかもしれませんが、全ての式変形には「なぜこういうふうに式変形をするのか？」といった根拠があるはずです。ただ、なんとなく解いていてはなかなかできるようになりません。式変形をするときは、なぜこういうふうに式変形をするのか常に根拠をもってするようにしておいてください。

問題３

次の関数に最大値、最小値があればそれを求めよ。

(1) $y = -x + 2 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$

(2) $y = 2x \quad (x \leqq -1)$

(3) $y = 2x^2 - 8x + 6$

(4) $y = x^2 - 4x - 3 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$

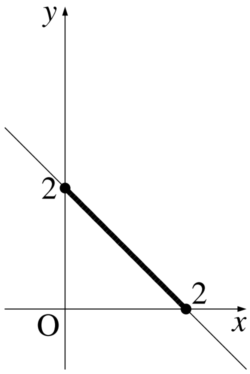
(5) $y = -x^2 + 2x - 5 \quad (2 \leqq x \leqq 4)$

(6) $y = x^2 \quad (-1 \leqq x < 2)$

【解答】

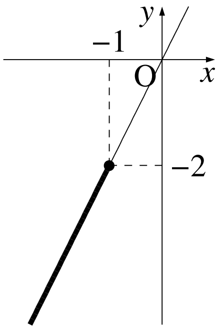
＊関数の最大値、最小値問題なのでグラフをかいて考えていくだけです。

(1) $y = -x + 2 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$



グラフより、$x = 2$ のとき最小値 **0** をとり、$x = 0$ のとき最大値 **2** をとる。

(2) $y = 2x \quad (x \leqq -1)$



グラフより、$x = -1$ のとき最大値 **−2** をとり、**最小値はない**。← $x \leqq -1$ のとき、グラフより y の値はいくらでも小さくなるので、最小値は存在しない

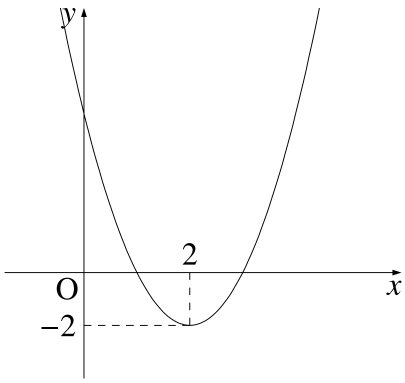
(3) $y = 2x^2 - 8x + 6$ のとき

＊グラフをかかないといけないが、グラフをかくには頂点が必要、ということは平方完成をしないといけないので、まずは平方完成をしてから解いていきます。

$y = 2x^2 - 8x + 6$

$= 2(x^2 - 4x) + 6$

$= 2(x - 2)^2 - 2$ ◀ 平方完成をした



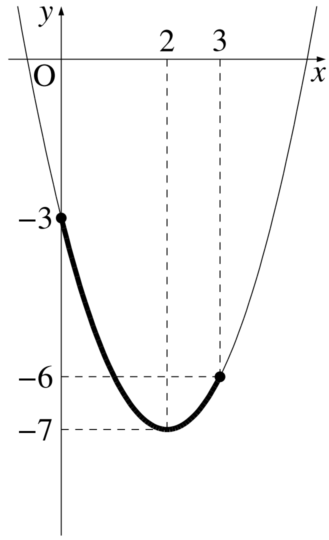
グラフより、**最大値はない**。$x = 2$ のとき最小値 **−2** をとる。＊これは上方向にはいくらでも大きくなるので、最大値はなしです。

(4) $y = x^2 - 4x - 3 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$

＊これもグラフをかくために、平方完成してから考えていきます。

$y = x^2 - 4x - 3$

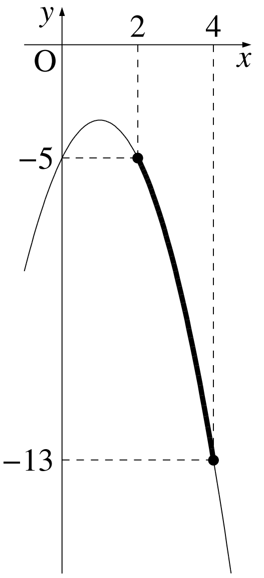
$= (x - 2)^2 - 7$



グラフより、$x = 2$ のとき最小値 **−7** をとり、$x = 0$ のとき最小値 **−3** をとる。

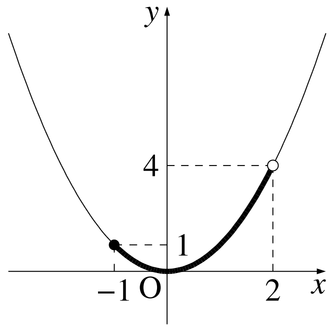
(5) $y = -x^2 + 2x - 5 \quad (2 \leqq x \leqq 4)$

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 2x - 5 \\ &= -(x^2 - 2x) - 5 \\ &= -(x-1)^2 - 4 \end{aligned}$$



グラフより、$x = 4$ のとき最小値 **−13** をとり、$x = 2$ のとき最大値 **−5** をとる。

(6) $y = x^2 \quad (-1 \leqq x < 2)$



＊上記を見たら最小値が 0 で最大値が 4 かな？と思うかもしれませんが、これはちょっと注意しないといけません。今回の定義域は $-1 \leqq x < 2$ と $x = 2$ は含みません。

ということは y は、限りなく 4 に近づくけど 4 となることはありません。このとき、最大値は存在しません。

間違いやすいので注意して下さい。

グラフより、$x = 0$ のとき最小値 **0** をとり、**最大値はない**。

これで、最大値最小値はだいたい理解できたと思います。少し変わった問題ですが次の問題を解いてみてください。

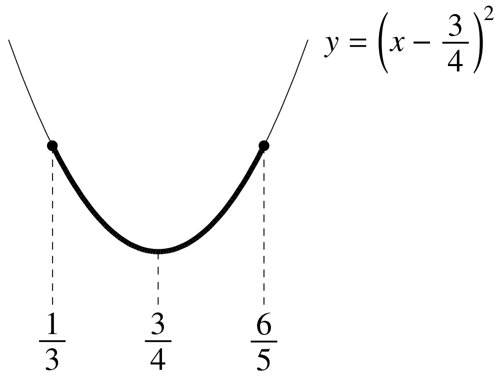
問題 4

$y = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2$ の $\frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{6}{5}$ における最大値を求めよ。

【解説】

これも、関数の最大値、最小値問題だからグラフをかいて解いていけばいいんだけど、

とりあえずグラフをかくと次のようになります。今回は、少し見やすくするために軸を省いたグラフをかくことにします。

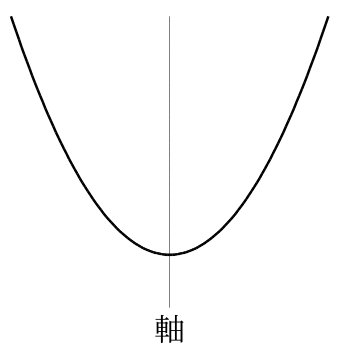


とりあえずグラフをかいてみたけど、最大値は $x = \dfrac{1}{3}$ か $x = \dfrac{6}{5}$ のときにとるということは分かるけど、どっちで最大となるのかこのグラフからは判断できないよね？もちろん両方の値を求めてみて、大きい方を最大値としたらいいんだけど、それも面倒くさい…

実は、これって両方計算しなくても、どっちで最大になるか簡単に判断できる方法があります。有名な性質なので知っている人も多いとは思いますが、次の性質を覚えておいてください。

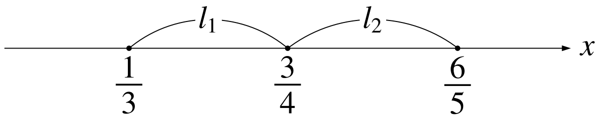
２次関数のグラフの性質

２次関数は、軸に関して対称である！



この性質さえ知っていれば、上記の問題は両方とも計算をする必要はありません。軸に関して対称ということを考えると x 座標で考えて、軸からの距離が遠い方が当然、最大となります。

今回は軸の方程式が $x = \frac{3}{4}$ で、両端の座標が $x = \frac{1}{3}$ と $x = \frac{6}{5}$ です。ということは、距離を求めると次のようになります。



後は $\frac{3}{4}$ から $\frac{1}{3}$ までの距離 l_1 と $\frac{3}{4}$ から $\frac{6}{5}$ までの距離 l_2 を求める訳なんですが、
数直線上における距離は大きい方から小さい方を引けばいいので、

$$l_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$
$$l_2 = \frac{6}{5} - \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$$

で、l_1 と l_2 の大小関係を調べるには両方の分母をそろえたらいいので、

$l_1 = \frac{5}{12} = \frac{25}{60}$, $l_2 = \frac{9}{20} = \frac{27}{60}$ となるので $l_1 < l_2$ です。よって、今回は軸の直線 $x = \frac{3}{4}$ から $x = \frac{1}{3}$ までの距離と $x = \frac{6}{5}$ までの距離とを比べると、$x = \frac{6}{5}$ の方が遠くなります。

と言うことは、この問題の最大値は $x = \frac{6}{5}$ のときだと分かります。

$$l_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$
$$l_2 = \frac{6}{5} - \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$$

と計算しましたが、これって結構面倒だったよね？今回は、まじめに計算したけど、どっちが遠いかっていうことさえ分かったらいいので、こんなに丁寧に解くことはないです。

小数で計算したらいいですよ。$\frac{1}{3} = 0.33$ くらいで計算していきます。
他の分数は $\frac{3}{4} = 0.75$, $\frac{6}{5} = 1.2$ なので

$l_1 = 0.75 - 0.33 = 0.42$, $l_2 = 1.2 - 0.75 = 0.45$ となるので $l_1 < l_2$ です。

(注) こんなことをすると $\frac{1}{3} = 0.3333\cdots$ なのにどうして 0.33 で止めたのですか？とたまに質問をされます。これは、ここらへんでいいのかな？と思ったからです。仮に $0.3333\cdots$ で計算したとしても $l_1 = 0.75 - 0.3333\cdots = 0.41$ いくらか、となるので大小関係は $l_1 < l_2$

と変わらないよね？どっちが大きいですか？という問題が仮に出題されていたとしたら最初解いたように丁寧に分数でしっかりと解く必要がありますが、今回はどっちが大きいのか自分で分かればいいので今回のように少し適当な大雑把な計算でいいです。

それでは、問題の解答に進みます。もう一度問題を書いておきます。

問題４

$y = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2$ の $\frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{6}{5}$ における最大値を求めよ。

【解答】

２次関数のグラフは、軸に関して対称なことを考え $y = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2$ の最大値は $x = \frac{6}{5}$ のとき

よって最大値は

$$y = \left(\frac{6}{5} - \frac{3}{4}\right)^2$$
$$= \left(\frac{9}{20}\right)^2$$
$$= \frac{81}{400}$$

よって、$x = \frac{6}{5}$ のとき、最大値 $\boldsymbol{\frac{81}{400}}$ をとる。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司