

「自宅で受けられる1対1の個別指導」の詳細は以下をクリック！

<http://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

2次関数No.9

「2次関数の解の配置に関する問題」

こんにちは河見賢司です。今回は2次関数の第9回「2次関数の解の配置に関する問題」です。

いきなりですが、次の問題を解いてください。

問題1

2次関数 $y = x^2 + 2(1+a)x + 3+a$ のグラフが次の条件をみたすように、定数 a の値の範囲を求めよ。

- (1) x 軸の正の部分で異なる2点で交わる。
- (2) x 軸の正の部分と負の部分で交わる。

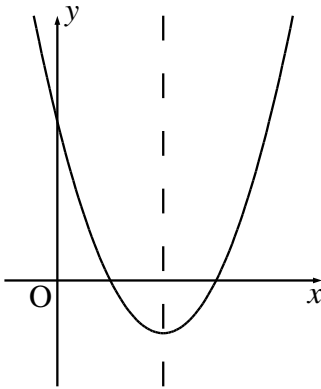
「2次関数の解の配置に関する問題」は解き方が決まっています。

判別式、軸の位置、 y 座標の正負が分かる点に着目して解いていきます。

↑上記を短縮して「判・軸・端に着目」とよんでいます。最後の「端」が少し分かりにくいかもしれませんが、最後の「 y 座標の正負が分かる点」と思ってください

「判別式、軸の位置、 y 座標の正負が分かる点に着目」と言っても、何を言っているのか分からないと思うので実際に上記の問題を解きながら解説していきたいと思います。

まず関数 $y = x^2 + 2(1+a)x + 3+a$ のグラフは下に凸な放物線だよね。下に凸な放物線が x 軸と正の部分で異なる2点で交わる時、以下のようなときです。



(注)どこからこのグラフがきたの?と思う人がたまにいます。今回は下に凸な放物線で、 x 軸と正の部分で2点で交わります。そこから、このグラフをかいただけです。もし、分からない人は自分で下に凸な放物線で x 軸の正の部分で異なる2点で交わる2次関数のグラフをかいてみてください。必ず、上記のグラフと同じ形になっていると思いますよ。

ここから、さっきの「判・軸・端(判別式、軸の位置、 y 座標の正負が分かる点)」がどうなっているか考えていきます。

まずは、判別式。これは2点で交わっているから $D > 0$ です。

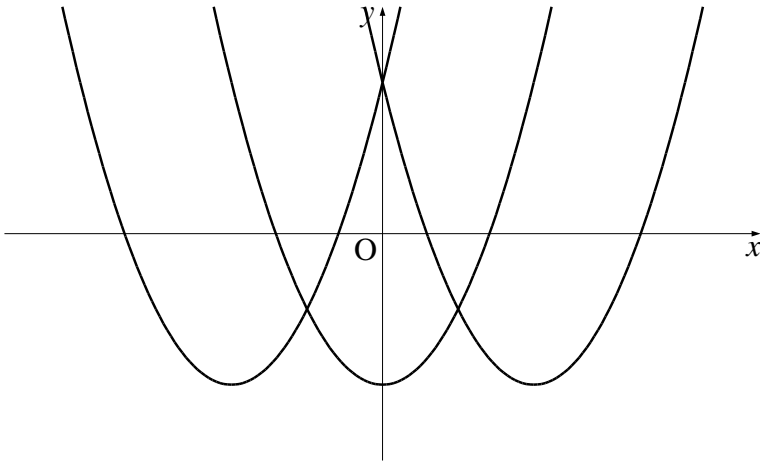
次に軸の位置。 x 軸の正の部分で2点で交わらないとダメなので、(軸) > 0 となります。もし、(軸) < 0 だったら、絶対に正の部分で2点で交わることはないよね。

最後に、「端」の y 座標の正負の分かる点。これはグラフから分かると思うけど、 $x = 0$ における y 座標の正負は必ず正でないといけません。

↑ グラフを見てもらえばわかると思うけど、 $x = 0$ のところでは必ず $y > 0$ になっているよね。

後は、これらの不等式を連立して解いていけばOKなんですけど、逆に $D > 0$ 、(軸) > 0 、 $f(0) > 0$ を満たしているとき、確かに「 x 軸と正の部分の2点で交わっているか?」ということを確認していきたいと思います。

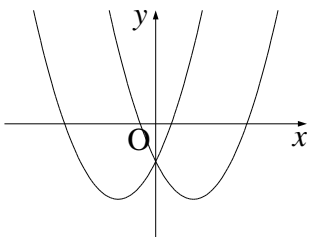
まず、 $D > 0$ です。下に凸な放物線で $D > 0$ となるのは、以下の3通りです。



- (i) $x < 0$ の異なる 2 点で交わる場合
- (ii) $x < 0$ の部分と $x > 0$ の部分の 2 点で交わる場合
- (iii) $x > 0$ の異なる 2 点で交わる場合

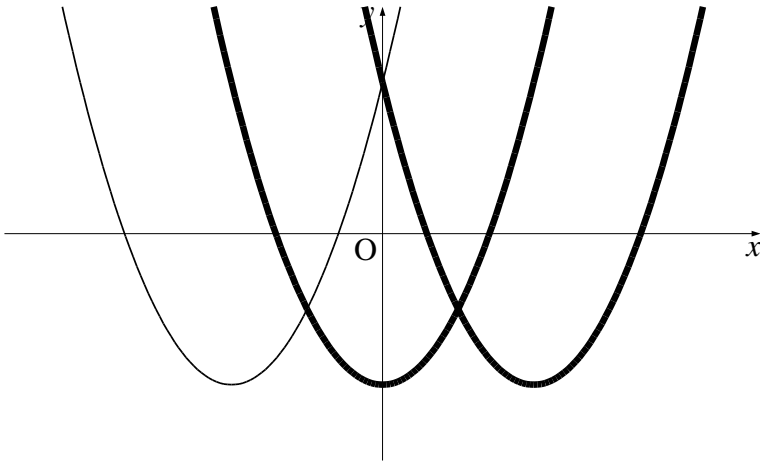
まず、 $D > 0$ で上記の 3 つパターンに絞られました。次に (軸) > 0 です。このとき、まず、「 $x < 0$ の異なる 2 点で交わる」場合は絶対に (軸) < 0 となるので、省かれます。

$x < 0$ と $x > 0$ で 2 点を持つ場合は、以下のように (軸) < 0 となる場合もありますし、(軸) > 0 の場合もあります。

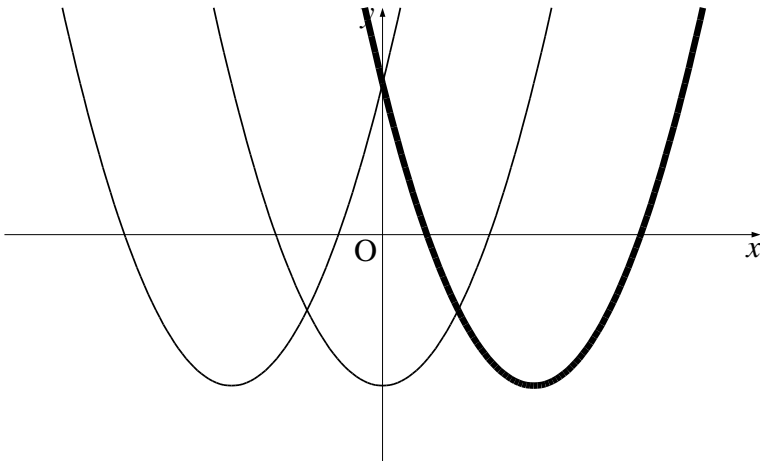


↑ $x < 0$ と $x > 0$ の 2 点で交わる場合でも、上図左のように (軸) < 0 となる場合もあれば、右のように (軸) > 0 となることもあります。

ですから、 $D > 0$ と (軸) > 0 の段階で、以下の 2 個に絞られます。一番、左側はありえない



最後に「 $x = 0$ における y の値が正」という条件を考えます。上図の2つのグラフのうち、 $x = 0$ における y 座標が正のものは、右側のグラフだけです。



これで、「 $D > 0$ 、(軸) > 0 、 $f(0) > 0$ 」を満たしているグラフは確かに $x > 0$ の部分で2点で交わっているということが確認できたと思います。これまで、解き方は知っていても、「なぜそうなるか?」ということを理解できていなかった人も多いと思いますが、これで納得できたんじゃないかと思います。それでは、(1)の解答に進みたいと思います。

【(1) の解説】

$f(x) = x^2 + 2(1+a)x + 3+a$ とし、 $x^2 + 2(1+a)x + 3+a = 0$ の判別式を D とする。題意をみたすとき、(i) $D > 0$ (ii) $-(1+a) > 0$ (iii) $f(0) > 0$ となる。

(i) $D > 0$ より

$$D/4 = (1+a)^2 - (3+a) > 0$$

$$a^2 + 2a + 1 - 3 - a > 0$$

$$a^2 + a - 2 > 0$$

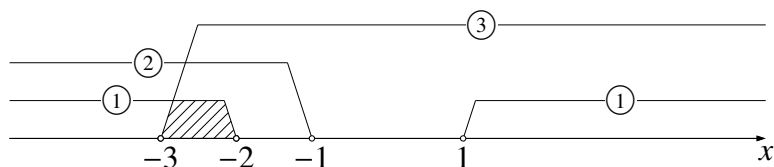
$$(a-1)(a+2) > 0$$

$$a < -2, 1 < a \dots \textcircled{1}$$

(ii) $-(1+a) > 0$ より $a < -1 \dots \textcircled{2}$

(iii) $f(0) = 3+a > 0$ より $a > -3 \dots \textcircled{3}$

①, ②, ③ より



よって、 $-3 < a < -2$ ◀ **これが答え**

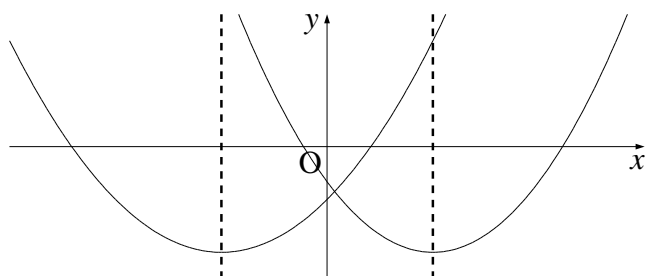
【(2) の解説】

それでは、次に(2)に進みます。この問題も、「2次関数の解の配置に関する問題」なのでとりあえず「判・軸・端」に着目して解いていきたいと思います。

まず、「判」ですがこれはちょっと保留しておきます。

*保留をする理由は、後ほど話します。

次に、「軸」ですが、今回軸はどこにあっても成立する可能性があります。



上図をみてもらえば、分かると思いますが、軸はどこにあっても「 x 軸の正の部分と負の部分で交わる」可能性があります。ですから、今回は軸は考えなくていいです。考えないというか、全範囲をとりうるので、考えようがありません。

最後に、「端」です。これは、分かるかな？まあ、言うとも $f(0) < 0$ です。今回は、グラフが x 軸と正の部分と負の部分で交わるのですが、下に凸な放物線が正の部分と負の部分で交わるためには $f(0) < 0$ でないといけないよね。仮に $f(0) > 0$ だと、絶対に正の部分と負の部分で交わってくれることはありません。

これで「軸」と「端」が終了しました。最初に、「判」を保留にしておきましたが、これを保留した理由は下に凸な放物線で、 $y < 0$ となる x が1点でも存在したら、その時点で絶対に2次関数のグラフは x 軸と2点で交わるって言うことが言えるんじゃない？

そして、今回は「端」で $f(0) < 0$ と言っています。これは、 $x = 0$ で y が負となることです。ということは、 $f(0) < 0$ を満たしている時点で、 $D > 0$ は必ず成立します。ですから、判別式は考えなくてOKです。

結局、この問題は $f(0) < 0$ 。唯一、これだけでOKです。「なんだか腑に落ちない」そういう人もいるかもしれませんが、でも、確認をしてください。下に凸な放物線で、 $f(0) < 0$ を満たしているときは、必ず $x < 0$ と $x > 0$ の部分で x 軸と交わっています。

これは頻出です。しっかりと理解しておいてくださいね。それでは、解答に進みたいと思います。

【(2) の解答】

題意を満たすとき、 $f(0) < 0$ である。 $f(0) = 3 + a < 0$ より、 $a < -3$ ◀ **これが答え**

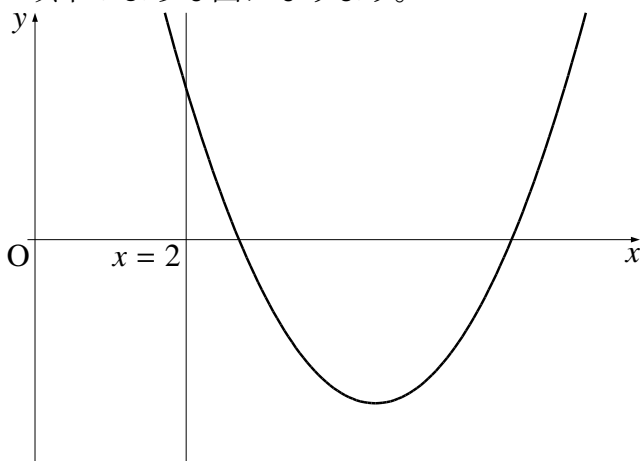
次に、練習のため以下の問題を解いてください。これさえできたら、「2次関数の解の配置に関する問題」は十分だと思いますよ。

問題 2

- (1) 下に凸な放物線である。このとき「判・軸・端」の条件式をかけ
- (i) $x > 2$ の部分で x 軸と異なる 2 点で交わる
 - (ii) $x < 3$ と $x > 3$ の部分の異なる 2 点で x 軸と交わる
 - (iii) $-1 < x < 1$ の部分で異なる 2 点で x 軸と交わる
- (2) 上に凸な放物線である。このとき「判・軸・端」の条件式をかけ
- (i) $x < 2$ の部分で x 軸と異なる 2 点で交わる
 - (ii) $x < 1$ と $x > 1$ の部分の異なる 2 点で x 軸と交わる
 - (iii) $-1 < x < 1$ の部分で異なる 2 点で x 軸と交わる

【解答 (1-i)】

以下のような図になります。



上記のようになるには

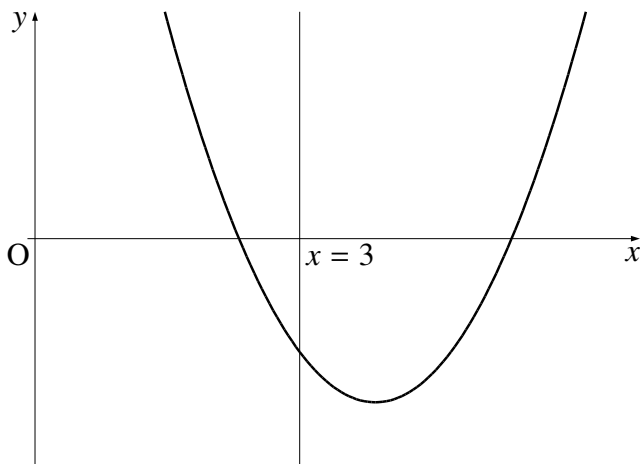
「判」 $D > 0$

「軸」 (軸) > 2

「端」 $f(2) > 0$

【解答 (1-ii)】

下に凸な放物線で、 $x < 3$ の部分と $x > 3$ の部分の異なる 2 点で x 軸と交わる

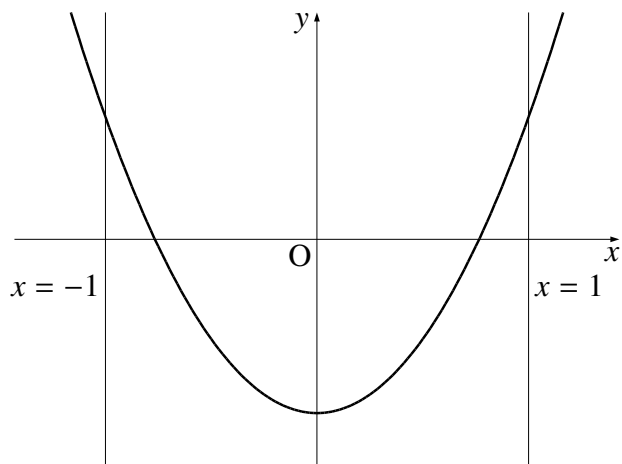


上記のようになるには、 $f(3) < 0$

* 「判」「軸」は必要なし

【解答 (1-iii)】

下に凸な放物線で、 $-1 < x < 1$ の部分の異なる 2 点で x 軸と交わる



上記のようになるには

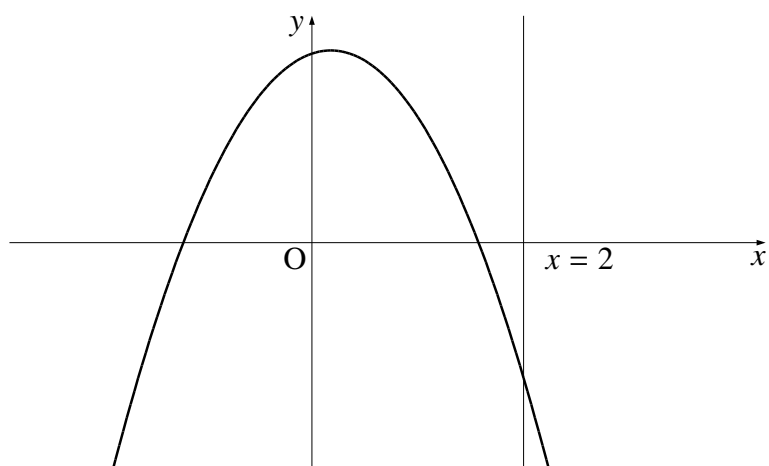
「判」 $D > 0$

「軸」 $-1 < (\text{軸}) < 1$

「端」 $f(-1) > 0$ かつ $f(1) > 0$

【解答 (2-i)】

上に凸な放物線で $x < 2$ の部分で x 軸と異なる 2 点で交わる



上記のようになるには

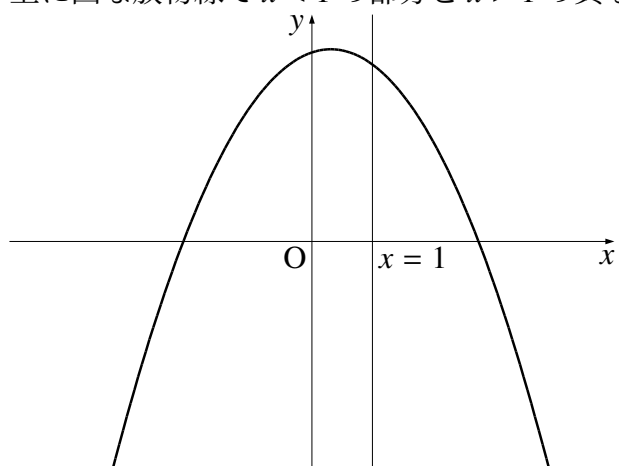
「判」 $D > 0$

「軸」 (軸) < 2

「端」 $f(2) < 0$

【解答 (2 -ii)】

上に凸な放物線で $x < 1$ の部分と $x > 1$ の異なる2点で x 軸と交わる

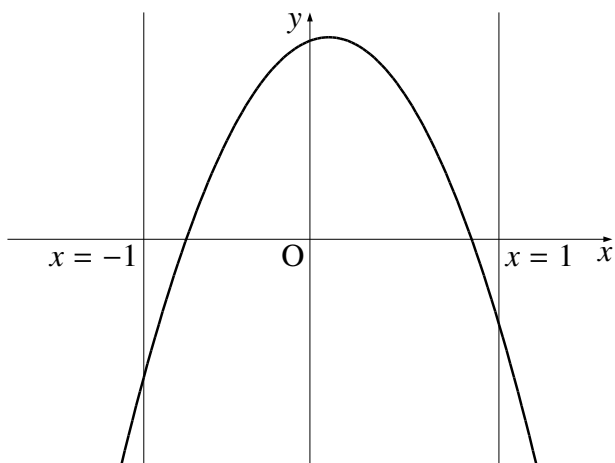


上記のようになるには、 $f(1) > 0$

* 「判」「軸」は必要なし

【解答 (2 -iii)】

上に凸な放物線で、 $-1 < x < 1$ の部分で異なる2点で x 軸と交わる



上記のようになるには

「判」 $D > 0$

「軸」 $-1 < (\text{軸}) < 1$

「端」 $f(-1) < 0$ かつ $f(1) < 0$

このくらいまで解けたら、まず2次関数の解の配置に関する問題はほぼ完璧です。次に、解の配置がらみの問題で、少し変わった問題を解いてもらいます。少しテクニク的な話になりますが、大学受験ではこういった考え方も必要になります。テクニクと言っても決して難しいものではありませんので、気軽に読んでいってください。

問題3

$a < b < c$ のとき、2次方程式 $(x-a)(x-c) + (x-b)^2 = 0$ は異なる2つの実数解をもつことを示せ

【解説】

まず、今回の問題は以下ようになります。 $y = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$ とすると、この2次関数のグラフが x 軸と異なる2点で交わる。

まあ、この問題を解いてみてというと、多くの方が判別式を使って解くと思います。それでも、できないことないんだけど、「少しおかしいな」ということに気づいて欲しいです。

別に根拠というわけではないんだけど、 $y = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$ って変わった形をしているよね。もしも、これが判別式を使って解く問題だったら、こんな変わった形で表記されずに x について整理された形で出題されるんじゃないかな？

だから、 $y = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$ なんて変わった形で出題されて瞬間に、「あっ、何かこの式を利用して解くのかな？」と気づけるようになっておいて欲しいです。

で、「どうしようかな？」と思うんだけど、これは $y = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$ に x に a や b や c を代入してみるくらいしかないよね。「えっ、そんなの気付かないよ」と思う人もいます。簡単な気付き方として、数学って文字数が多い、次数が高い、項数が多い。とにかくどんなものでも多ければ多いほど考えにくいんです。だから、減らせるときはとにかく減らす方向で考えます。

今回は $x = a$ なんかを代入すると一方の項が 0 になって、項の数が少なくなるよね。だから、とりあえずこういった作業が思いつけます。

では、実際に $x = a$ を $y = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$ に代入してみます。

$$\begin{aligned} y &= (a-a)(a-c) + (a-b)^2 \quad \leftarrow x = a \text{ を代入した} \\ &= (a-b)^2 \end{aligned}$$

今回は、 $y = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$ のグラフが x 軸と 2 点で交わればいいんだよね。これを言いかえると、 y がある値 x で $y < 0$ となれば、 $y = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$ が x 軸と 2 点で交わるということは証明できたんじゃない？なぜかというと、 $y = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$ は下に凸な放物線です。下に凸な放物線が、 $y < 0$ となるようなことがあれば、絶対に x 軸と 2 点で交わるということがいえます。

で、 y の値が負になるということを言いたいんだけど、今回は $(a-b)^2$ は当然 0 以上なので、 $y < 0$ とは言えません。

$x = a$ が無理だったんだから、次に $x = b$ を $y = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$ に代入してみたいと思います。

$$\begin{aligned} y &= (b-a)(b-c) + (b-b)^2 \quad \leftarrow x = b \text{ を代入した} \\ &= (b-a)(b-c) \end{aligned}$$

とりあえず $x = b$ を代入したら $y = (b-a)(b-c)$ ってなったけど、今回は $a < b < c$ っていう

条件があったよね。だから、 $b-a > 0$ かつ $b-c < 0$ です。これより、 $y = (b-a)(b-c) < 0$ となります。これで、証明終了です。

この問題だったら判別式でも解けたかもしれないけど、こっちの方がだいぶラクです。「出題者の意図を考えろ」とはよく言われます。とにかく、こういった変わった出題の仕方をされたら、まず「何かあるな」と気づけるようになっておいてください。それでは、解答に進みます。

【解答】

$y = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$ とすると、題意を満たすとき、放物線 $y = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$ が x 軸と異なる 2 点で交わる。

$y = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$ に $x = b$ を代入すると

$$y = (b-a)(b-c) + (b-b)^2$$

$$= (b-a)(b-c) < 0 \quad (\because a < b < c \text{ より } b-a > 0 \text{ かつ } b-c < 0)$$

$y = (x-a)(x-c) + (x-b)^2$ は下に凸な放物線であることを考え、 x 軸と異なる 2 点で交わる。

以上より、 $(x-a)(x-c) + (x-b)^2 = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつ。(証明終)

今回のところは、これで終了です。今回話した、解の配置の問題は頻出です。今年(2011年)のセンター試験にも出題されていました。難しく感じていた人もいると思いますが、本当にワンパターンで解けてしまうということが理解できたと思います。

解の配置に関する問題はとにかく「判・軸・端に注意する」です。

また、最後は少し変わった問題を出題しました。数学は、問題にヒントが隠れています。とにかく、普段と違うことが出てきたら、ほとんどの場合、そこに何らかのヒントがあるはずですよ。そういったことを普段から意識しながら問題を解くようにしてください。そうすると、本当に理解のスピードが変わってきます。それでは、がんばってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>

ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司