

問題 10

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$  のとき、次の式の値を求めよ。

(1)  $\sin \theta \cos \theta$

(2)  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

(3)  $\sin \theta - \cos \theta$

【解説】

三角関数の対称式の問題です。よく出てくるのでしっかりと理解しておいてください。

(1)(2) は解けても (3) の解き方を忘れてしまったという人が意外に多いので、解き方をよく覚えておいてください。

【解答】

(1)

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \leftarrow \text{両辺を 2 乗した}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} - 1$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

(2)

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$\uparrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$  に  $a = \sin \theta, b = \cos \theta$  を代入した

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{8}\right)\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{9}{16}$$

$$= \frac{11}{16}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\&= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \\&= 1 - 2\left(-\frac{3}{8}\right) \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \text{ をそれぞれ代入} \\&= 1 + \frac{3}{4} \\&= \frac{7}{4} \\ \therefore \sin \theta - \cos \theta &= \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\end{aligned}$$

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

メールはこちらから

magdai@hmg-gen.com (何か言ってくれと嬉しいです)