

問題 1 1

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき、次の式の値を求めよ。

(1)  $\sin \theta \cos \theta$

(2)  $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

(3)  $\sin \theta + \cos \theta$

【解説】

$a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3$  より、 $a^3 - b^3$  は  $a$  と  $-b$  の対称式とみなすことができます。

【解答】

(1)

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \leftarrow \text{両辺 2 乗した}$$

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

(2)

$$\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = \sin^3 \theta + (-\cos \theta)^3 \quad \leftarrow \sin \theta \text{ と } -\cos \theta \text{ の対称式}$$

$$= \{\sin \theta + (-\cos \theta)\} - 3 \sin \theta (-\cos \theta) \{\sin \theta + (-\cos \theta)\}$$

$\uparrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$  の公式に  $a = \sin \theta$ ,  $b = \cos \theta$  をそれぞれ代入

$$= (\sin \theta - \cos \theta)^3 + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + 3 \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5}{8} \sqrt{2}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\&= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \quad \blacktriangleleft \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より} \\&= 1 + 2 \frac{1}{4} \quad \blacktriangleleft \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \text{ を代入した} \\&= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin \theta + \cos \theta &= \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \\&= \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

メールはこちらから

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com) (何か言ってくれと嬉しいです)