

問題 2 2

$\sin 3\theta$ と $\cos 3\theta$ の公式を導け。

【解説】

3 倍角の公式も加法定理から簡単に求めることができます。

【解答】 \sin の加法定理より

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\theta + 2\theta) = \sin \theta \cos 2\theta + \cos \theta \sin 2\theta \quad \leftarrow \alpha = \theta, \beta = 2\theta \text{ を代入した}$$

$$\sin 3\theta = \sin \theta(1 - 2\sin^2 \theta) + \cos \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\uparrow \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta, \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ をそれぞれ代入した}$$

$$= \sin \theta - \sin^3 \theta + 2 \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$= \sin \theta - \sin^3 \theta + 2 \sin \theta(1 - \sin^2 \theta) \quad \leftarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ を代入した}$$

$$= \sin \theta - \sin^3 \theta + 2 \sin \theta - 2 \sin^3 \theta$$

$$= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \quad \leftarrow \sin \text{ の 3 倍角の公式が導けた！}$$

\cos の加法定理より

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\theta + 2\theta) = \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta \quad \leftarrow \alpha = \theta, \beta = 2\theta \text{ を代入した}$$

$$\cos 3\theta = \cos \theta(2 \cos^2 \theta - 1) - \sin \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\uparrow \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1, \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ をそれぞれ代入した}$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \quad \leftarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ を代入した}$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta + 2 \cos^3 \theta$$

$$= -3 \cos \theta + 4 \cos^3 \theta \quad \leftarrow \cos \text{ の 3 倍角の公式が導けた！}$$

【注意】

3 倍角の公式は 2 倍角の公式ほどよく出るものではないが、導くのが面倒なので暗記しておいてください。

どういうふうに覚えてもいいですが、有名なゴロ合わせがあるのでそのゴロ合わせで覚えたらいいと思います。

3 倍角のゴロ合わせなんですけど、これも人から聞いたものですが \sin の 3 倍角の公

式を「サンシャインノヨシミ」で覚えたらいいと思います。「サン」は「3」、「シャイン」は「sin」、「ノ」は「- (マイナス)」、「ヨ」は「4」、「シ」は「sin」、「ミ」は「3乗の3」です。

また \cos の3倍角は \sin の3倍角と符号が反対になり、 \sin のところに \cos が入ると覚えれば、暗記できると思います。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

メールはこちらから

magdai@hmg-gen.com (何か言ってくれと嬉しいです)