問題２２

$\sin 3\theta$ と $\cos 3\theta$ の公式を導け。

【解説】

３倍角の公式も加法定理から簡単に求めることができます。

【解答】 sin の加法定理より

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\theta+2\theta) = \sin\theta\cos 2\theta + \cos\theta\sin 2\theta$$ ◀ $\alpha=\theta, \beta=2\theta$ を代入した

$$\sin 3\theta = \sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \cos\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$

⇑ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ より！

$$= \sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta$$

$$= 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$$

$$= 3\sin\theta(1-\sin^2\theta) - \sin^3\theta$$ ◀ $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ より

$$= 3\sin\theta - 3\sin^3\theta - \sin^3\theta$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$ ◀ sin の３倍角の公式が導けた！

cos の加法定理より

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\theta+2\theta) = \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta$$ ◀ $\alpha=\theta, \beta=2\theta$ を代入した

$$\cos 3\theta = \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \sin\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$

⇑ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ より

$$= \cos^3\theta - \sin^2\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$$

$$= \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$$

$$= \cos^3\theta - 3(1-\cos^2\theta)\cos\theta$$ ◀ $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ より

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta$$

$$= -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$$ ◀ cos の３倍角の公式が導けた！

【注意】

３倍角の公式は２倍角の公式ほどよく出るものではないが、導くのが面倒なので暗記しておいてください。

どういうふうに覚えてもいいですが、有名なゴロ合わせがあるのでそのゴロ合わせ

で覚えたらいいと思います。

３倍角のゴロ合わせなんですが、これも人から聞いたものですが sin の３倍角の公式を「サンシャインノヨシミ」で覚えたらいいと思います。「サン」は「３」、「シャイン」は「sin」、「ノ」は「–（マイナス）」、「ヨ」は「４」、「シ」は「sin」、「ミ」は「３乗の３」です。

また cos の３倍角は sin の３倍角と符号が反対になり、sin のところに cos が入ると覚えれば、暗記できると思います。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

メールはこちらから
magdai@hmg-gen.com (何か言ってくれると嬉しいです)