問題３５

$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$ を解け。ただし $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とする。

【解説】

よく分からないけど、とりあえず sin の２倍角と３倍角を代入して解いていくことにします。

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$$

$$\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 0$$

⇑ sin の２倍角、３倍角の公式をそれぞれ代入した

ここからすべての項に sin が含まれているから両辺を sin で割りたいけど、いきなり割ってはダメ。**両辺を変数で割るときは、その変数が０になりうるかどうか確認しないといけない。もし、なる場合は場合分けをして考える。**

今回は、$\sin\theta = 0$ となるのは $\theta = 0, \pi$ のときなので $\theta \fallingdotseq 0, \pi$ のときと $\theta = 0, \pi$ のときは場合分けをしないといけません。それでは解答に進みます。

【解答】

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$$

$$\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 0 \cdots (*)$$

(i) $\sin\theta = 0$ つまり $\theta = 0$ または π のとき

$(*)$ は成立するので、これは解となる。

(ii) $\sin\theta \fallingdotseq 0$ つまり $\theta \fallingdotseq 0, \pi$ のとき、$(*)$ の両辺を $\sin\theta (\fallingdotseq 0)$ で割ると

$$1 + 2\cos\theta + 3 - 4\sin^2\theta = 0$$

$$1 + 2\cos\theta + 3 - 4(1 - \cos^2\theta) = 0$$ ◀ $\sin^2\theta = \cos^2\theta - 1$ より

$$2\cos^2\theta + \cos\theta = 0$$

$$\cos\theta(2\cos\theta + 1) = 0$$

$$\cos\theta = 0, -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

以上より、$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi$

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

メールはこちらから
magdai@hmg-gen.com (何か言ってくれると嬉しいです)