問題３６

$\sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$ を解け。ただし $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とする。

【解説】

この問題は $\sin 4\theta$ が出てきています。４倍角の公式も加法定理から導けますが、４倍角以上の式がでてきたら、ほとんどの場合で和積の公式を利用します。$\sin 2\theta$ と $\sin 4\theta$ のペアですとうまくいきます。ペアは一番大きいものと小さいものをペアにすることが多いです。

【解答】

$$\sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$$

$$(\sin 2\theta + \sin 4\theta) + \sin 3\theta = 0$$

$$2\sin\frac{2\theta + 4\theta}{2}\cos\frac{2\theta - 4\theta}{2} + \sin 3\theta = 0 \quad \blacktriangleleft\ \sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \text{ より}$$

$$2\sin 3\theta\cos(-\theta) + \sin 3\theta = 0$$

$$2\sin 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta = 0 \quad \blacktriangleleft\ \cos(-\theta) = \cos\theta \text{ より}$$

$$\sin 3\theta(2\cos\theta + 1) = 0$$

(ｉ) $\sin 3\theta = 0$ のとき、$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $0 \leqq 3\theta < 6\pi$ を考え

$$3\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

(ii) $2\cos\theta + 1 = 0$ つまり $\theta = -\frac{1}{2}$ のとき $\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

以上より、$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

メールはこちらから
magdai@hmg-gen.com (何か言ってくれると嬉しいです)