

問題 38

$t = \tan \frac{\theta}{2}$  のとき,  $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$  を  $t$  を用いて表せ。

【解説】

この問題もよく出てきます。これも知らなければ解けないと思うので解き方をしっかりと覚えておいてください。

$$\sin \theta = \sin 2 \cdot \frac{\theta}{2}$$

↑ 与えられて条件は  $\tan \frac{\theta}{2}$  のみ、この条件を使うために強引に  $\frac{\theta}{2}$  が出てくるように式変形をした

$$= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad \leftarrow \text{2倍角の公式より}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1$  より、こんな言われたら気づくけど普通は絶対に気づかないと思う。ですから、しっかりと覚えておいてください。ここからは分母分子を  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$  で割るとうまくいきます。

【解答】

(1)

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2 \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} + 1}$$

$$\leftarrow \text{分母分子を } \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{ で割った}$$

$$= \frac{2 \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}}{\left( \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right)^2 + 1}$$

$$= \frac{2t}{t^2 + 1} \quad \leftarrow \text{これが答え}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} + 1} \quad \leftarrow \text{分母分子を } \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{ で割った} \\ &= \frac{1 - \left( \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right)^2}{\left( \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right)^2 + 1} \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \leftarrow \text{これが答え}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\tan \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2t}{\frac{1+t^2}{1-t^2}} \\ &= \frac{2t}{1-t^2} \quad \leftarrow \text{分母分子に } (1+t^2) \text{ をかけた。これが答え。}\end{aligned}$$

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

メールはこちらから

magdai@hmg-gen.com (何か言ってくれと嬉しいです)