問題４４

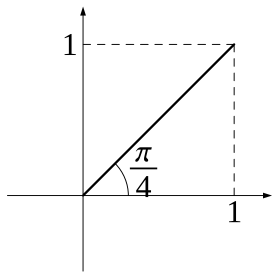
$f(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta + \cos\theta + 2$ の最大値と最小値を求めよ。ただし、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。

【解説】

与式が $\sin\theta + \cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta$ のみの式なので $X = \sin\theta + \cos\theta$ と置き換えて解いていきます。

【解答】

$X = \sin\theta + \cos\theta$ とする。



$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ ◀ 合成をした

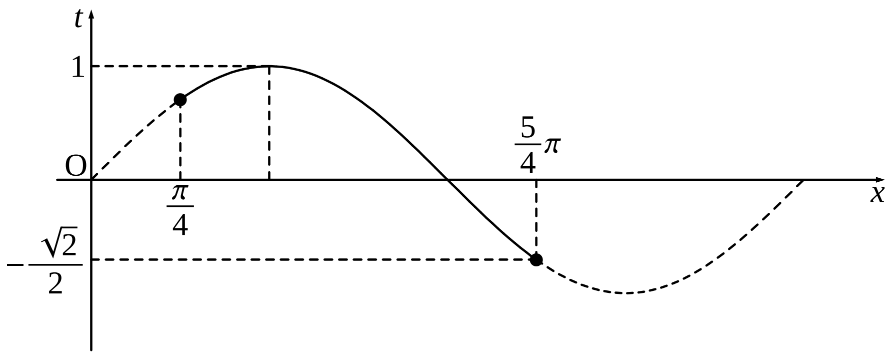
ここで $t = \theta + \frac{\pi}{4}$ とする。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$

$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \pi + \frac{\pi}{4}$ ◀ 文字を置き換えた時は範囲に注意する。

$\frac{\pi}{4} \leqq t \leqq \frac{5}{4}\pi$

$\sin t \ (\frac{\pi}{4} \leqq t \leqq \frac{5}{4}\pi)$ の最大値・最小値を求める。



グラフより

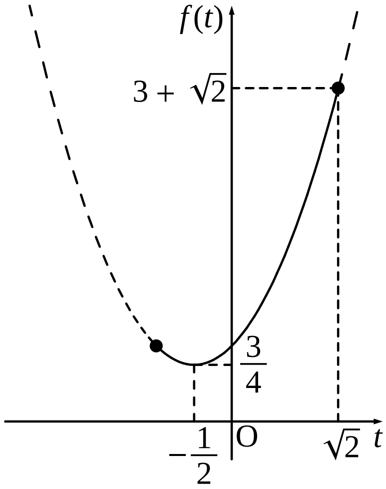
$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq t \leqq 1$

$-2\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq 2t \leqq 2$ ◀ 両辺に２をかけた

$-\sqrt{2} \leqq X \leqq 2$ ◀ $X = 2t$ より

$f(\theta)$ の最大値と最小値は
$f(\theta) = t^2 + t + 1$ の $-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ の最大値と最小値と一致する。

$$f(t) = t^2 + t + 1$$
$$= (t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$ ◀ 平方完成をした！



グラフより、$t = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{3}{4}$、$t = \sqrt{2}$ のとき最大値 $3 + \sqrt{2}$ をとる。

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

メールはこちらから
magdai@hmg-gen.com (何か言ってくれると嬉しいです)

河見賢司