

問題 4 6

$f(\theta) = 2(\sin \theta - \cos \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta$ の最大値と最小値を求めよ。

【解説】

与式が $\sin \theta - \cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ のみの式なので、 $X = \sin \theta - \cos \theta$ と置き換えて解いていきます。

【解答】

$X = \sin \theta - \cos \theta$ とする

$$= \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leftarrow \text{合成をした}$$

$$-1 \leq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \text{ より } -\sqrt{2} \leq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \text{ となる。}$$

↑ 文字を置き換えた時は範囲に注意する。 $X = \sin \theta - \cos \theta$ と置き換えたので X の値の範囲を求めた。今回の問題では θ に値の範囲がないので当然 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ の値の範囲は $-1 \leq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ となります。

$$\sin \theta - \cos \theta = X$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = X^2 \leftarrow \text{両辺を 2 乗した}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = X^2$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = X^2 \leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

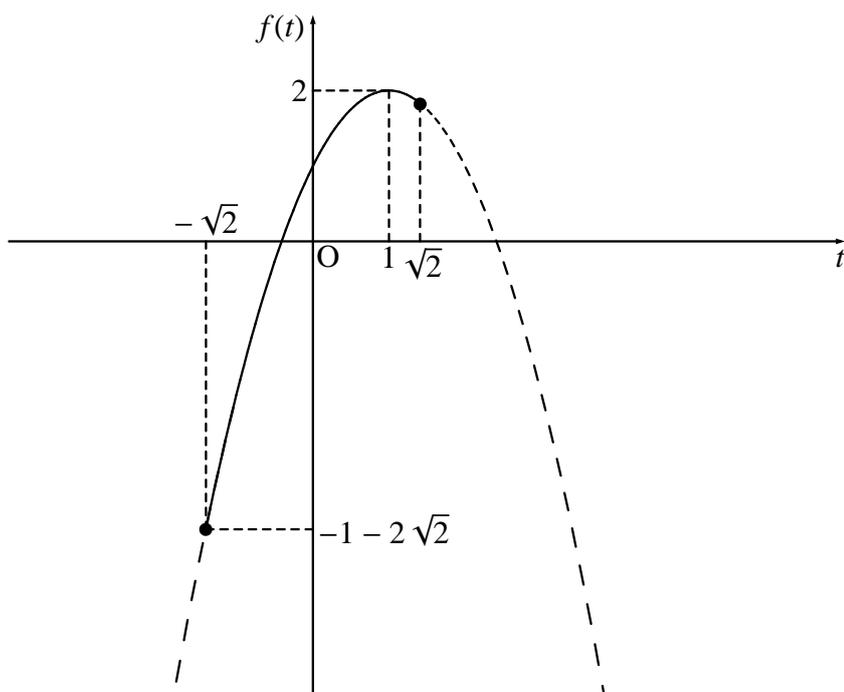
$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1 - X^2}{2}$$

$$f(\theta) = 2(\sin \theta - \cos \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2X + 2 \cdot \frac{1 - X^2}{2} \leftarrow \sin \theta - \cos \theta = X, \sin \theta \cos \theta = \frac{1 - X^2}{2} \text{ をそれぞれ代入した}$$

$$= -X^2 + 2X + 1$$

$$= -(X - 1)^2 + 2 \leftarrow \text{平方完成をした}$$



グラフより、最大値 2 、最小値 $-1 - 2\sqrt{2}$

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

メールはこちらから

magdai@hmg-gen.com (何か言ってくれと嬉しいです)

河見賢司