

問題 4 8

$f(\theta) = \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta$ の最大値と最小値を求めよ。

【解説】

与式が $a \sin^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta$ の形になっているので、

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

を代入して解いていきます。

【解答】

$$f(\theta) = \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta$$

$$= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\uparrow \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \text{ をそれぞれ代入した。}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} + \sqrt{3} \sin 2\theta - \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2}$$

$$= \sqrt{3} \sin 2\theta - \cos 2\theta$$

$$= 2 \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) \leftarrow \text{合成をした}$$

$$-1 \leq \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \text{ より}$$

$$-2 \leq 2 \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) \leq 2 \Rightarrow -2 \leq f(\theta) \leq 2$$

よって $f(\theta)$ の最大値は 2, 最小値は -2 である。

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

メールはこちらから

magdai@hmg-gen.com (何か言ってくれると嬉しいです)

河見賢司