場合の数　その１

こんにちは、河見賢司です。今回から何回かにわたって場合の数を説明したいと思います。

場合の数ってなんとなく意味も分からずに解いている人が多いけど、しっかりと意味を理解しながら解いていかないと、少し難しくなるととたんにできなくなります。

これまど多くの人の答案を見てきましたが、本当におかしな解き方をしている人が多いです。「なんでこうなったの？」と聞くと本当に意味の分からない説明をします。意味が分からないというよりも解いた生徒本人も自分が何をやっているのかということが分かっていないということが多いです。

場合の数は、難しい問題になると確かにややこしいですがこれから話すような内容をひとつずつ理解していくとそれほど難しくありません。それでは、がんばっていきましょう。

それでは、場合の数の解説に進みます。まずは、次のことを覚えてください。

場合の数の考え方

場合の数の問題で、「そして」と日本語に直せるとき掛け算で考える！

いきなり、「『そして』に直せるときは掛け算で考える」と言われてもよく分からないと思うので、次の問題を通して理解していってください。

問題１

1〜5 までの５つの自然数から異なる３個を使って３ケタの整数をつくる。このとき３ケタの整数は何通りできるか求めよ。

【考え方】
３ケタの整数を作るのは次のような日本語に直せるんじゃない？

「まず百の位の数を選ぶ」そして「十の位の数を選ぶ」そして「一の位の数を選ぶ」

上記のように日本語で、「そして」をつけて直すことができたよね？だから、今回の問題では掛け算を使います。場合の数では、掛け算か足し算か混同しちゃっている人が多いですけど、こういうふうに理解したら、まず間違うことはないと思います。どういった

とき掛け算でなく足し算になるかは、問題２で解説しています。

百の位の選び方 … １～５の５通り
十の位の選び方 … １～５の５個の自然数のうち、百の位で選んだ数を除く４通り
一の位の選び方 … １～５の５個の自然数のうち、百の位と十の位で選んだ数を除く３通り

【解答】
$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$　　　　よって６０個 ◀ これが答え

これで、どのように日本語に直せるか理解できたよね。重要だからもう一度言っておくけど、「**日本語で『そして』と直せるときは掛け算をする**」ということを覚えておいてください。

上記のような解き方をすると、「どうして百の位から考えたんですか？十の位や一の位から考えたらダメなんですか？」と聞かれることがあります。この場合は別にいいです。どの順番で考えてもらってもかまいません。

小さい方から順に考えて、「まず一の位を選ぶ」そして「十の位を選ぶ」そして「百の位を選ぶ」としてもらってもかまいません。自身で計算をしてみれば分かると思いますが、これでも場合の数は当然同じになります。

今回の場合は、どの順番で考えてもいいですが、実は場合の数には数える順番が存在します。どういうふうな順番で考えるかは、次の条件で考えます。

場合の数の考え方

場合の数は制限の強い順から考える！

制限の強い順と言っても分からないと思うので、次の問題を通して説明をしたいと思います。

問題２

0～5 までの６つの整数から異なる３個を使って３ケタの整数をつくる。

(1) 全部で何個できるか
(2) 偶数は何個できるか

【(1) の解説】
問題１は、1〜5 までの数字だったから制限がなかったけど、今回は制限があるよね？どういうことかというと、**百の位の数は、０がくることはできない**(⇐ 百の位の数が０だと、３ケタの数にはならないので百の位に０がきてはダメ)

十の位、一の位は０が来てもいいから何も制限はないよね？ということは、今回は百の位には０が来たらダメという制限があって、十の位、一の位には制限が何もありません。

さっき説明したように、「**場合の数は、制限の強い方から考える**」のですから、今回の問題は、まず百の位を考えます。そのあとの、十の位、一の位は制限がないのでどっちから考えても別にいいです。

今までのことを踏まえて、日本語に直すと

「まず百の位の数を選ぶ」そして「十の位の数を選ぶ」そして「一の位の数を選ぶ」となります。

今回は「百の位」だけに制限があり、「十の位」と「一の位」には制限がないので、「十の位」と「一の位」は逆になってもいいです。

百の位の選び方 … ０〜５の６個の数のうち、０を除く５通り
十の位の選び方 … ０〜５の６個の整数のうち、百の位で選んだ数を除く５通り
一の位の選び方 … ０〜５の６個の整数のうち、百の位と十の位で選んだ数を除く４通り

【(1) の解答】
$5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$　　　　よって、１００個 ◂ これが答え

【(2) の解説】
一番最初に「『そして』と直せるときは掛け算を使う」と言いましたが、これとあわせて次のことを覚えておいてください。

場合の数の考え方

場合の数の問題では、「または」と日本語に直せるときや場合分けできるときは足し算をする。

どういうことかと言うと、これもまた問題を通して解説していきます。まず、分かっていると思うけど偶数となるのは、下一桁が偶数のときだよね？

だから、一の位は０〜５の偶数がくればいいんだけど、この中で偶数は０、２、４の３通り、これで計算できたらいいんだけど、一の位に０が来るときと、２ or ４が来るときは計算結果が変わってくる！

なぜかといえば、(1) を思い出してほしいんだけど０があると百の位は０がくることはできないので … ということを考えないといけない！一方で、一の位で０を使ったときは、もう０はないので百の位にはどの数字もくることができる … 計算の仕方が違うので、一の位が０になるかどうかで場合分けをしないといけない！

場合分けは足し算とういうことを踏まえてこの問題を考えていきます。

(i) 一の位が２または４のとき
確率は、制限の強い方から考えるんだったけど、この場合一番制限の強いのは「一の位」です。で、次は「百の位」です。なぜかというと、百の位は０が来ることはできませんが、十の位は０を含めて何がきてもいいので、百の位の方が制限が強いです。これらのことを踏まえて、日本語に直すと

「まず一の位の数を選ぶ」そして「百の位の数を選ぶ」そして「十の位の数を選ぶ」と日本語に直すことができます。

一の位の選び方 … ２または４の２通り
百の位の選び方 … ０〜５の６個の整数のうち、一の位で選んだ数と０を除く４通り
十の位の選び方 … ０〜５の６個の整数のうち、一の位で選んだ数と百の位で選んだ数を除く４通り

よって、この場合 $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ 個となります。

次に、一の位が０のときです。

(ii) 一の位が０のとき
この場合、一の位で０を使っているので、百の位にはどの数字もくることができます。ですから、百の位も十の位も制限がないので、(i) の場合と違い百の位、十の位どっちから考えてもいいです。日本語に直すと次のようになります。

「まず一の位の数を選ぶ」そして「百の位の数を選ぶ」そして「十の位の数を選ぶ」

今回は、「百の位」と「十の位」に制限はないので、上記が逆になってももちろんＯＫです。

一の位の選び方 … ０の１通り
百の位の選び方 … ０～５の６個の整数のうち、一の位で使った０を除く５通り
十の位の選び方 … ０～５の６個の整数のうち、一の位で使った０と百の位で選んだ数を除く４取り

よって、$1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$ 個

場合の数で、場合分けは足し算なので (i) の場合と (ii) の場合を足し合わせて、求める場合の数は $32 + 20 = 52$ となります。

【(2) の解答】
偶数となるには、一の位が偶数となればよい

(i) 一の位が２または４のとき
$2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ 個

(ii) 一の位が０のとき
$1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$ 個

(i), (ii) より、求める場合の数は $32 + 20 = 52$ 個 ◀ これが答え！

(2) なんですが、別解があります。余事象という方法なんですが、(すべての整数)=(偶数)+(奇数) なんだよね？

さっきの解法では、偶数を直接求めたけど場合分けが必要で少し面倒だったよね (このくらいはそれほど面倒じゃなかったかもしれないですが …)、でも奇数だったら場合分けが必要ないんだ。で、(すべての整数)=(偶数)+(奇数) を偶数について解くと (偶数)=(すべての整数)−(奇数) となります。

こういうふうに求める解法を余事象といいます。余事象の考えは場合の数では本当に重要になってくるので、今後詳しく解説したいと思います。現段階では、こんな解き方もあるんだな、といった程度で別にいいです。では、与事象を使った別解です。

奇数となるのは、一の位が奇数であればよいので、一番制限が強いのは「一の位」です。

次に制限が強いのは「百の位」です。なぜかというと「百の位」には０が来たらダメという制限があるからです。最後に「十の位」です。これらを踏まえて日本語に直すと

「まず一の位の数を選ぶ」そして「百の位の数を選ぶ」そして「十の位の数を選ぶ」となります。

一の位の選び方 … １、３、５の３通り
百の位の選び方 … ０～５の６個の整数のうち、一の位で選んだ数と０を除く４通り
十の位の選び方 … ０～５の６個の整数のうち、一の位で選んだ数と百の位で選んだ数を除く４取り

よって、求める場合の数は $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ 個です。

(1) より、全体は１００個あり、今求めたように奇数が４８個あるので、偶数は $100-48 = 52$ 個あります。

【(2) の別解】
奇数は $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ 個。全体の数は (1) より１００個ある。よって、偶数は $100 - 48 = 52$ 個 ◀ これが答え！

これで今回のプリントは終わりです。どうだったでしょうか？今回扱った問題は、本当に一番基本的といっていいくらい簡単な問題だったですけど、場合の数の考え方を理解できていなかったという人も多いと思います。

最初に言いましたが、場合の数はしっかりと論理的に考えていかないと難しくなると急にできなくなってきます。まずは、簡単な問題が中心にはなりますが、ひとつずつ丁寧に理解していってください。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com