場合の数　その２

こんにちは、河見賢司です。今回は、場合の数の第２回です。

第１回で、場合の数の「掛け算と足し算の区別の仕方」や「場合の数は制限の強い方から考える」といったことを話しました。

もし、まだ「場合の数　その１」を読まれていないのでしたら、このプリントより先に http://www.hmg-gen.com/baai1.pdf をご覧になってください。

それでは、今回の本題に入っていきたいと思います。いきなりですが、次の公式を覚えてください。

順列

n 個のものから r 個をとって一列に並べる場合の数は、${}_n\mathrm{P}_r$ である。

$${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

上記は、順列の公式なんて言われたりしますが、これも意味を考えたら明らかですよ。前回話した、「そして」は掛け算ということを使います。今回は、場合の数に制限がないので、一番左から考えていきたいと思います。n 個のものから r 個をとって一列に並べるという作業を、日本語に直すと次のようになります。

「まず一番左のものを選ぶ」そして「左から２番目のものを選ぶ」そして … そして「一番右のものを選ぶ」

一番左のもの … n 通り
左から２番目のもの … 全部で n 個あるが、一番左で選んだものを除く $n-1$ 通り
左から３番目のもの … 全部で n 個あるが、一番左で選んだものと左から２番目で選んだものを除く $n-2$ 通り
………………… どんどんいって
一番右のもの ⋯ 全部で n 個あるが、一番左で選んだもの、左から２番目に選んだもの、… 、左から $r-1$ 番目に選んだものを除く $n-r+1$ 通り注を見よ

「そして」は掛け算なので、求める場合の数は $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ 通り、となります。順列の P を公式だと思っている人がいます。もちろん、公式として覚えておいてもらってもいいのですが、後ほど勉強をする組み合わせの C と今回の順列の P を混同

する人が多いです。ですが、先ほど説明したように、P の意味をしっかりと理解していれば、まず間違えることはないと思います。

(注) たまに一番右のものが $n-r+1$ 通りになるっていうことは分からない人がいますので、一応説明をしておきます。

まず、今回は r 個を一列に並べます。一番右側はそれまでの $r-1$ 個を並べてきています。ということは、全部で n 個あるなかで、$r-1$ 個を使ってきたので、残りは n 個から $r-1$ を引いた $n-(r-1)=n-r+1$ 個です。

それでは、順列のごくごく簡単な問題を解いてもらいます。

問題１

５人から３人選んで一列に並べる時の場合の数を求めよ

【解説】
公式で解いてもらってもいいですが、一応これまで解いてきた「日本語」に直してから解くという解法でまずは解きたいと思います。

５人から３人選んで一列に並べるという作業を、日本語に直すと

「まず一番左に来る人を選ぶ」そして「真ん中に来る人を選ぶ」そして「一番右に来る人を選ぶ」

一番左に来る人 … ５人いるから５通り
真ん中に来る人 … ５人いる中から、一番左に来る人を除いた４通り
一番右に来る人 … ５人いる中から、一番左に来る人と真ん中に来る人を除いた３通り

「そして」は掛け算になおすことができるので、答えは $5\times4\times3$ となります。

これを公式で解くと、${}_n\mathrm{P}_r$ は n 個のものから r 個選んで、それを一列に並べる場合の数なので、${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3$ となります。この問題は、公式を使って解いてもらったほうがだいぶラクですが、意味も分からずに公式を使っている人が本当に多いです。順列の公式 P を理解した上で公式を使うのはかまいませんが、意味を理解せずになんとなく公式を解くということだけはやめておいてください。

【解答】
求める場合の数は ${}_5P_3 = 5\times 4\times 3 = 60$ 通り

次に、「! (階乗 (カイジョウ))」について話したいと思います。

$n!$ について

異なる n 個のものを一列に並べる場合の数の数は $n!$ 通りである。

$n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$

これも、これまで話してきた日本語に直す作業さえ理解していたら簡単だと思います。

「まず一番左を選ぶ」そして「左から２番目を選ぶ」そして … そして「右から２番目を選ぶ」そして「一番右を選ぶ」

一番左の選び方 … n 通り
左から２番目の選び方 … n 個のうち、一番左で選んだものを除く $n-1$ 通り
……………… どんどんいって
右から２番目の選び方 … n 個のうち、これまでに選んだ $n-2$ 個を除く $n-(n-2) = 2$ 通り
一番右の選び方 … n 個のうち、これまでに選んだ $n-1$ 個を除く $n-(n-1) = 1$ 通り

「そして」は掛け算なので、求める場合の数は $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ となります。

では、これらのことを使って次の問題を解いてもらいます。

問題２

男子４人、女子３人が１列に並ぶとき、次の場合は何通りあるか

(1) 両端とも女子である場合の数
(2) 女子どうしが隣り合わない場合の数
(3) 女子３人がとなりあう場合の数

【(１) の解説】
これは、場合の数は制限の強い方から考えるという鉄則を頭にいれて解いていきます。

今回の問題で、制限が強いのは両端です。

○ × × × × × ○
○ の部分に女子が来て、× の部分には男女どちらが来てもいいです。制限の強いのは両端ですが、両端の場合、右も左も制限の強さは同じなのでどちらから考えてもいいですが、今回は左から順に考えていきます。

「まず左端にくる女子を選ぶ」そして「右端にくる女子を選ぶ」そして「× の部分を並べる」

左端にくる女子の選び方 … 女子は３人いるので、３通り
右端にくる女子の選び方 … 女子３人のうち、右端で選んだ一人を除く２通り
× ５つの並べ方 … ５人を一列に並べればいいので、5!

「そして」は掛け算なので、求める場合の数は $3 \times 2 \times 5!$ となります。

【(1) の解答】
求める場合の数は、$3 \times 2 \times 5! = 720$ 通り

【(2) の解説】
女子どうしが隣り合わない場合です。こういった隣り合わない問題はよく出題されるので覚えておいてください。

× ○ × ○ × ○ × ○ ×

女子どうしが隣り合わないには、上図の ○ に男子が入り、女子は × に入ればいいんだよね？これを日本語に直すと

「○ ４つに男子を入れる」そして「× ５つの中から３つに女子が入る」とすることができます。ここからはどうするかと言えば、「そして」は掛け算なので、「○ ４つに男子を入れる」の場合の数と、「× ５つの中から３つに女子が入る」の場合の数を求めてそれぞれかけ合わせてもらったらいいんだよね。

まず、**「○ ４つに男子を入れる」**の場合の数を考えます。これは、簡単だと思います。答えは 4! となります。もし分からないという人は、今までさんざんやってきた、日本語に直すという手法でといてもらったらいいですよ。「まず一番左の ○ に入れる」そして「左から２番目の ○ に入れる」… もう解説は書かないけど、分かるよね？

次に、**「× ５つの中から３つに女子が入る」**です。これは、今までとは少し考え方が違います。先ほどの男子の場合でしたら、◯ の中の入り方が何通りあるからというふうに解いていましたが、今度は女子の入り方から考えていきます。

日本語に直すと、**「まず一人目の女子が５つの × の中のどらかに入る (選び方は５通り)」そして「二人目の女子が５つの × のうち、一人目の女子が入った × を除くどこかに入る (選び方は４通り)」そして「３人めの女子が５つの × のうち、一人目と二人目の女子が入った × を除くどこかに入る (選び方は３通り)」**とすることができます。

今回のものぐらいなら、考えるのはそれほど難しくないかもしれませんが、場合の数は柔軟に考えていく必要があります。たまに、無理やり公式にあてはめて解こうとする人がいますが、それではなかなかできるようになりません。問題が出てきて、その都度丁寧に考えるようにしておいてください。

このことより、**「× ５つの中から３つに女子が入る」**これの場合の数は $5 \times 4 \times 3$ となります。これで、「◯ ４つに男子を入れる」の場合の数と、「× ５つの中から３つに女子が入る」の場合の数が求められたので、後はこれらをかけ合わせたものが答えです。

【(2) の解答】
求める場合の数は $4! \times 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1440$ 通り。

上記の $4! \times 5 \cdot 4 \cdot 3$ の計算ですが、$4! \times 5 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 5 \cdot 4 \cdot 3$ と直して左から順にかけ合わせる人がいますが、それでは面倒です。掛け算はどの順番でかけてもいいので、できるだけ簡単になる組み合わせで解くようにしてください。

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = (5 \cdot 2) \times (4 \cdot 3) \times (4 \cdot 3)$ というふうにペアにして計算をすると暗算で計算をすることができます。掛け算のときは、順番を考えてから計算をするようにしてください。

【(3) の解説】
女子３人が隣り合う場合ですが、これも解き方が決まっていて「女子３人をひと塊りの集団」とします。

女子３人をひと塊りとみなすので、男子４人とあわせると５個の異なるものを並べる場合の数と同じです。ですから、$5!$ となります。

また、女子３人をひと塊りにするといいましたが、女子３人の並べ方も考えないといけないといけないので、その時の場合の数は、３人を一列に並べるので $3!$ です。

よって答えは、これらをかけ合わせて $5! \times 3!$ となります。この「隣り合う」というのは本当によく出てくるのでしっかりと理解しておいてください。それでは、解答に進みます。

【(３)の解答】
求める場合の数は、$5! \times 3! = 720$ 通り

これで、第２回の場合の数は終了です。P や階乗の説明をしました。今日話したような事柄を適当にしか理解できていないという人が多いです。簡単な問題だと、なんとなく適当な理解でも解けるのですが、しっかりと理解しておかないと、少し難しくなると急に解けなくなります。

今回のところは基本的なことですので、しっかりと理解しておいてください。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com