# 場合の数　その３

こんにちは、河見賢司です。今回は、場合の数の第３回です。

今回は、順列の中でも同じ文字をふくむものを一列に並べるときの問題と組み合わせの公式について解説したいと思います。

まずは、次の公式を覚えてください。

**同じものを含む順列**

$n$ 個のもののうち、$a$ 個は同じもの、$b$ 個は同じもの、$c$ 個は同じもの、$\cdots$ を一列に並べたときの場合の数は、

$\dfrac{n!}{a!\,b!\,c!\,\cdots}$ $(a+b+c+\cdots=n)$ となる。

ちょっと上の公式は分かりにくいかもしれませんので、具体的な問題を解いてもらいます。

**問題１**

$a, a, a, b, b$ を一列に並べたときの場合の数は？

【解説】
これは先ほどの公式を使うだけです。$a, a, a, b, b$ は全部で５つあるけど、$a, a, a$ と同じものが３つ、$b, b$ と同じものが２つあるので、求める場合の数は $\dfrac{5!}{3!\,2!}$ となります。

【解答】
求める場合の数は $\dfrac{5!}{3!\,2!}=10$

この公式がどうして成り立つのか知りたい人のために一応解説しておきます。ただ、この問題に限って言えば単純に公式をあてはめるだけで解けてしまうので、「別にいいや」と思う人は読まなくていいです。

$a, a, b, c, d$ の一列を並べるとします。$a, a$ と２つ同じものがありますが、これを $a_1, a_2$ と区別があるとします。そうすると、$a_1, a_2, b, c, d$ 異なる５文字を一列に並べたらいいので、求める場合の数は $5!$ となります。

でも、実際には $a_1$ と $a_2$ には区別がないので、次のような場合は同じになるよね。

$a_1,\ a_2,\ b,\ c,\ d$
$a_2,\ a_1,\ b,\ c,\ d$
$\Uparrow$ $a_1$ と $a_2$ は同じものなので、上記は同じものとみなすことができる。

これで分かったと思うけど、$a_1,\ a_2,\ b,\ c,\ d$ を一列に並べてから $a_1$ と $a_2$ を一列に並べたものは等しいので、これを 2 で割ったものが求める場合の数になります。

一応答えを書いておくと、$\dfrac{5!}{2}$ です。これでなんとなく分かったよね。

同じものが 3 つあったとします。そうすると、同じものが 3! だけ存在します。だから、区別がないものと計算をしてから 3! で割らないといけません。

ごくごく簡単な説明でしたがなんとなくは、公式が成立する意味が理解できたと思います。ただ、公式がなぜ成り立つかという知識は必要ないので、問題を解くときは公式を使って解いてもらったらいいと思います。それでは、この公式を使う問題を何問か解いてもらいます。

問題 2

TOKOYAMA という 8 文字がある。この 8 文字を一列に並べる。次の場合の数を求めよ。

(1) O と A が必ず偶数番目にある
(2) T, K, Y, M がこの順になる

【(1) の解説】
×○×○×○×○ とすると、偶数番目に O と A が来るということは ○ の中に O と A を並べて、× の中に O, A 以外の T, K, Y, M を入れたらいいです。

たぶん分かると思いますが、これを日本語に直すと

「4 つの ○ に O 2 文字と A 2 文字を一列に並べる」そして「4 つの × に異なる 4 文字 T, K, Y, M を一列に並べる」

「4 つの ○ に O 2 文字と A 2 文字を一列に並べる」は 4 文字を一列に並べるのだが、AA, OO と同じ文字が 2 文字ずつあるので先ほど解説した公式を使い $\dfrac{4!}{2!\,2!}$ となります。

「４つの×に異なる４文字 T, K, Y, M を一列に並べる」場合の数は、異なる４文字を一列に並べたらいいので 4! となります。

場合の数において「そして」は掛け算なので、答えは $\dfrac{4!}{2!\,2!}\times 4!$ となります。

【(１) の解答】
$\dfrac{4!}{2!\,2!}\times 4! = 144$ 通り

【(２) の解説】
問題を解く前に言っておくけど、この問題をよく T, K, Y, M はひと塊りにいないといけないと考える人がいるみたいだけど、それは違うよ。

今回の問題は、「T, K, Y, M がこの順になる」としか言っていないので、例えば A, T, O, Y, O, M, A のように T, K, Y, M がひと塊りでなくても、T, K, Y, M の順になっていたらＯＫです。

この問題は、最初は少し分かりにくい人もいるかもしれないけど、答えから言うと T, K, Y, M を同じ文字とみなして一列に並べてもらったものが、求める場合の数です。

簡単に理由を説明します。TOKOYAMA で、T, K, Y, M を同じ文字とみなすのですから例えば ◯ とでもします。

そうすると、TOKOYAMA は OOAA◯ ◯ ◯◯ を一列に並べることになります。

例えば、◯OO◯◯A◯A となったとします。◯ には自動的に左から T, K, Y, M を入れることにします。こうすると、T, K, Y, M はこの順になってくれているよね。◯OO◯◯A◯A となった場合、◯ には左から順に自動的に、T, K, Y, M を入れていくので、TOOKYAMA となります。

ですから今回の問題は、OOAA◯ ◯ ◯◯ を一列に並べる場合の数と等しくなります。２つずつ同じものが２つあり、４つ同じものがあるので、先ほどの公式にあてはめると求める場合の数は、$\dfrac{8!}{2!\,2!\,4!}$ となります。

これで理解できる人はすんなりと理解することができますが、理解できない人もいると思います。僕も、受験生のときなぜこうなるのか、なかなか理解できませんでした。この問題は、理解できなくても機械的に解くことができるので解き方を覚えておいたら大丈夫だと思います。**「順番が変わらない」**⇒**「同じ文字とみなして計算」**です。

【(2) の解答】
求める場合の数は $\dfrac{8!}{2!\,2!\,4!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 2} = 420$ 通り

たまに「理解しないと先に進めない」という人がいます。確かにその気持ちよく分かります。でも、理解できないものは理解できないんですよね。ですから、そういったときはある程度割り切ってどんどんと進めるようにしたらいいと思います。

僕も、先ほどの問題は理解できませんでした。理解できなくても機械的に解けるのでそれで解いていました。ある程度たってから考えなおしてみると、不思議議なことに理解できるようになっていました。

数学もスポーツなんかと同じように、基礎体力のようなものがあると思うんです。どんどん先に進めているうちに、数学の基礎体力がついてきて、かつてはまったく理解できなかったものも考えられるようになります。理解できないからといって、その場でストップしているといつまでたっても体力はつきません。できることからでいいから、少しずつしていけばいいと思います。

話がそれました、それでは組み合わせの話しに進みたいと思います。まずは、次のことを覚えておいてください。

**組み合わせ**

異なる $n$ 個のものから $r$ 個取り出す場合の数は、${}_n\mathrm{C}_r$ である。

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$$

よく ${}_n\mathrm{P}_r$ と ${}_n\mathrm{C}_r$ を混同してしまう人がいますが、「${}_n\mathrm{P}_r$ は一列に並べる」で「${}_n\mathrm{C}_r$ は取り出すだけ (並べない)」ということを覚えておけば間違えるということはなくなると思います。

なぜ ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$ が成立するか知りたいという人もいると思います。これも、これまで話してきたことを理解していたら導くことができますよ。日本語で考えます。

**「異なる $n$ 個から $r$ 個を選んで一列に並べる」＝「異なる $n$ 個から $r$ 個を選ぶ」そして「選んだ $r$ 個を一列に並べる」**

「異なる $n$ 個から $r$ 個を選んで一列に並べる」これは順列の定義そのものなので ${}_n\mathrm{P}_r$ です。

「異なる $n$ 個から $r$ 個を選ぶ」これが組み合わせの定義なので ${}_n\mathrm{C}_r$ です。

「選んだ $r$ 個を一列に並べる」これの場合の数は、$r!$ です。

「そして」が掛け算であることを考えると ${}_n\mathrm{P}_r = {}_n\mathrm{C}_r \times r!$ です。これを ${}_n\mathrm{C}_r$ について解くと ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$ です。

実は、問題１はこの組み合わせでも解くことができます。

問題１

$a, a, a, b, b$ を一列に並べたときの場合の数は？

【解説】
$a, a, a, b, b$ を一列に並べるんだけど、○○○○○の中から３つの○を選んで $a$ を入れるとします。例えば、左から３つの○を選んだとします。

そうすると $a\,a\,a$ ○ ○となります。残った○ ２つに $b$ を入れたらいいんだけど、入れ方はもちろん１通りだよね。($a$ が入るところを選ぶと、自動的に $b$ が入るところも決まってくる)

ですから、求める場合の数は ${}_5\mathrm{C}_2 = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ 通りとなります。

【解答】
${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通り

それでは、今回の最後の問題として今回話した「同じ文字を含む順列」と「組み合わせ」両方の知識の必要な問題を解いてもらいます。

問題３

$a, a, b, b, c, d, e$ の７文字がある。この７文字から５文字をとって１列に並べるときの場合の数を求めよ。

【解説】
単純に７文字の中から５文字を選んで一列に並べるのなら ${}_7\mathrm{P}_5$ ですが、今回はこの計算ではうまくいきません。

分かっていると思うけど、選ぶ文字全部バラバラでないからです。

今回は、７文字の中からどの５文字を選ぶかによって計算の仕方が変わってきます。計算の仕方が違うので場合分けが必要になってきます。場合の数で「場合分け」は足し算ということをしっかりと理解しておいてください。

【解答】
(i) 同じ文字２個が２組あるとき
この場合 $a, a, b, b$ と選んでいるので、残りの $c, d, e$ から１文字選ばないといけません。１文字の選び方は当然３通り (計算をするのなら、異なる３つのものから１つを選ぶ場合の数なので ${}_3\mathrm{C}_1$) です。

また、５文字を並べる場合の数は２文字ずつ同じ文字が含まれているので、$\dfrac{5!}{2!\,2!}$ です。

文字の選び方は３通りあって、各々の並べ方は $\dfrac{5!}{2!\,2!}$ とあるので、求める場合の数は $3 \times \dfrac{5!}{2!\,2!}$ となります。

$3 \times \dfrac{5!}{2!\,2!} = 90$ 通り

(ii) 同じ文字２個が１組あるとき
この場合 $a, a$ と残り３つは、３つとも違う文字の場合、または $b, b$ と残り３つは、３つとも違う文字の場合の２通りが考えられます。

$a, a$ のときと、$b, b$ のときは当然場合の数は同じなので、$a, a$ のときの場合の数を求め、それを２倍して場合の数を求めていきます。

まずは文字の選び方ですが $a, a$ の他に３つの文字を選ぶ必要があります。$b, c, d, e$ 異なる４文字の中から３つ選べばいいので、選び方の場合の数は ${}_4\mathrm{C}_3 = 4$ です。

これで、文字の選び方が終わったのであとは選んだ文字を一列に並べる場合の数です。今回は５つの文字を並べるが２つが同じ文字なので、求める場合の数は $\dfrac{5!}{2!}$ となります。

これで、$a,\ a$ のときの場合の数は ${}_4\mathrm{C}_3 \times \dfrac{5!}{2!}$ となります。

$a,\ a$ 以外にも $b,\ b$ のときもあるので、求める場合の数はこれを２倍したもので $2 \times {}_4\mathrm{C}_3 \times \dfrac{5!}{2!}$ となります。

$2 \times {}_4\mathrm{C}_3 \times \dfrac{5!}{2!} = 480$ 通り

(iii) すべての文字がばらばらのとき
この場合、文字の選び方は $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ から５文字とりだすので１通りしかありません(異なる５文字から、異なる５文字を取りだす場合の数は当然１通り)。

後は、ばらばらの５文字を一列に並べるので、求める場合の数は $5!$ です。

$5! = 120$

(i), (ii), (iii) より求める場合の数は、
$90 + 480 + 120 = 690$ 通り

これで、今回の解説は終わりです。「場合の数」って適当にしか理解していない人が多いです。今回話したような事柄も知らなかったという人も多いと思います。なんとなく適当な解き方でも教科書に載っているような簡単な問題だと解くことはできますが、少し難しくなるととたんに解けなくなります。しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com