場合の数　その４

こんにちは、河見賢司です。今回は、場合の数の第４回です。

前回の「場合の数の第３回」で順列の中でも同じ文字をふくむものを一列に並べるときの問題を解説しました。

ご覧になっていない人はコチラを見てください。http://www.hmg-gen.com/baai3.pdf

今回は、前回解説をした「同じものを一列に並べるとき」の知識を使って解く、有名な問題を２つほど解説をしたいと思います。

今回、解説する内容はどの教科書にも載っているような有名な問題なので、場合の数を勉強した人はまず見たことがある問題だとは思います。ですが、何となく解いているだけでしっかりと理解しながら解けているという人は少ないと思います。

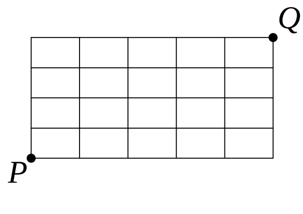
僕も高校生のときは、そうでした。なぜだか分からないけど、こうすると解けてしまうといった理由で大して考えることもなく解いてました。

もちろん、それでも解けないこともないのですが、単なる暗記だと時間がたつとどうしても忘れてしまいます。ですが、ひとつずつ理解しながら解いていくと、忘れにくいです。ですから、「知っているよ」と思う問題であってもじっくりと解説を読んで欲しいです。

それでは、今回の本題に進みます。まずは、最短経路に関する問題です。

問題１

P から Q まで行く最短経路は何通りあるか。



【解説】

P から Q に向かうときは、最短経路となるには右か上にしかいったらダメだよね。もし、

左とか下に行ったら最短じゃなくなってしまいます。

で、P から Q に向かう方法が何通りあるかだけど、P から Q には右向きに５回。上向きに４回進まないといけないんだから、求めたい場合の数は右向きの矢印 $\longrightarrow$ ５個と上向きの矢印 $\uparrow$ ４個を一列に並べる時の場合の数と等しくなります。

よって場合の数は $\dfrac{9!}{5!\,4!}$ となります。前回の場合の数の第３回でも言いましたが、この場合 ${}_9\mathrm{C}_5$ と計算しても計算結果はもちろん同じになります。

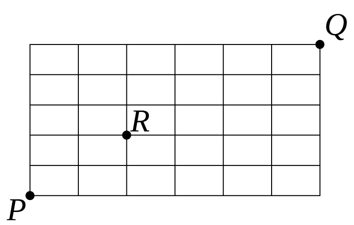
２通りの解き方 (表記の仕方) がありますが、好きなほうでいいと思いますよ。ただ、意味は「$\longrightarrow$ ５個と上向きの矢印 $\uparrow$ ４個を一列に並べる時の場合の数」なんだ、ということは理解しておいてください。

【解答】
$\dfrac{9!}{5!\,4!} = 126$ 通り

では、次のこの最短経路の問題でもよく出題される頻出問題を解きたいと思います。

問題２

P から Q まで行く最短経路のうち R を通らないものは何通りあるか



【解説】
まず、問題文を見てほしいんだけど「R を通らない」ものの場合の数を求めよだよね。

今回の問題に限らず、数学には「**否定文って考えにくい**」という鉄則があります。ですから、否定文が来たときは「肯定文に直せないかな？」と考えるようにしておいてください。

分かると思うけど、今回の場合次の関係式が成り立つよね。

(P から Q に向かう (全体の) 最短経路)= (R を通る場合の最短経路)+(R を通らない場合の最短経路)

⇔ (R を通らない場合の最短経路)= (P から Q に向かう (全体の) 最短経路)−(R を通る場合の最短経路)

上記のような関係式ができます。これなら否定分である「R を通らない」を直接求めることなく解くことができるよね。

今回のように簡単な問題だったらすぐに気づくことができるけど、複雑になると気づきにくいときもあります。ですから「**否定文が来たら、肯定文に直せないかな？**」ということは、徹底して頭に叩き込んで問題文に否定文がきた瞬間に思いつけるようになっておいてください。

「R を通る場合の数」はこれまで場合の数を 3 回にわたって話してきましたが、そのことを理解していたら簡単です。日本語に直すと、次のようになります。

「P から R に進む$\left(\dfrac{4!}{2!\,2!}\text{通り}\right)$」そして「$R$ から Q に進む$\left(\dfrac{7!}{4!\,3!}\text{通り}\right)$」です。「そして」は、掛け算なので R を通る場合の数は $\dfrac{4!}{2!\,2!}\times\dfrac{7!}{4!\,3!}$ です。それでは、解答に進みます。

【解答】
求める最短経路の数は、P から Q の最短経路全体から R を通るものを引いたもの。

P から Q の最短経路全体は $\dfrac{11!}{5!\,6!}=462$ 通り

R を通るものは $\dfrac{4!}{2!\,2!}\times\dfrac{7!}{4!\,3!}=210$

よって求める最短経路の数は $462-210=252$ 通り ◀ これが答え

では、次の問題に進みます。いきなりですが、次の問題を解いてください。たぶん見たことのある問題ですよ。

問題３

８個のりんごを３人で分ける。１個ももらわない人があってもよいものとすると何通りの分け方があるか

【解説】
有名な問題なので、知っている人も多いと思いますが初めてみる人は、どうやって解くのかな？となんだか分かりにくい問題ですよね。

これは次のように考えます。例えばＡさん、Ｂさん、Ｃさんの３人で分けることとします。

○ ○ | ○ ○ ○ | ○ ○○
上記のようにリンゴに仕切りを入れたと考えます。そして、一番左側がＡさんがもらうリンゴ、真ん中がＢさんのもらうリンゴ、一番右側がＣさんがもらうリンゴとします。

上記のようになったときもらうリンゴの個数はＡさん２個、Ｂさん３個、Ｃさん３個です。

次のようになったときは、
○| ○ ○ ○ ○ ○ ○|○
上記のときＡさん１個、Ｂさん６個、Ｃさん１個です。

極端な場合ですが、次のようになったとき
|| ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
Ａさん０個、Ｂさん０個、Ｃさん８個です。

ここまできたら分かる人が多いと思うけど、今回の問題の場合の数は、| ２個と ○ ８個を一列に並べる場合の数と一致します。ですから、今回の問題の答えは $\frac{10!}{2!\,8!}$ となります。

【解答】
求める場合の数は $\frac{10!}{2!\,8!} = 45$ 通り

次に、以下の問題を解いてください。

問題４

x, y, z は０以上の整数とする。このとき $x+y+z=8$ の解の個数を求めよ

【解説】
「今、場合の数の問題を解いているはずなのに、なぜ整数問題？」なんて思うかもしれませんが、実はこれさっきの問題とまったく同じです。

さっきは８個のリンゴをＡさん、Ｂさん、Ｃさん３人で分けました。Ａさんのもらうリンゴの個数を x 個、Ｂさんを y 個、Ｃさんを z 個としたら、当然 $x+y+z=8$ となるよね？

このタイプの問題もたまに出てくるので、よく覚えておいてください。

【解答】
x, y, z の解の個数は、問題３の場合と等しい。よって、４５個

では、似たような問題ですが次の問題を解いてください。

問題５

x, y, z は正の整数とする。このとき $x+y+z=8$ の解の個数を求めよ

【解説】
問題５とほとんど同じですけど、少しだけ違います。どこが違うかと言うと、さっきは「x, y, z は０以上の整数」だったけど、今回は正の整数だよね。つまり、０を含んではいけないということ

さっきみたいに仕切りで考える手法だと、０個の場合も含んじゃうので少しうまくいきません … そこで、考えないといけません。この問題の考え方は２通りあります。式で考える手法と問題文から考える手法です。

まずは、式で考える手法で考えていきます。

まず、今回なぜ考えにくいかというと「正の整数で、０を含まない」からだよね？だったら、少し強引に式変形をして０を含む形にしたらいいんじゃない？次のように式変形をします。

x, y, z は正の整数を表記すると、$x \geqq 1, y \geqq 1, z \geqq 1$ これを 0 以上にしたいんだから、両辺から１を引いて (１を移項すると考えてもよい) $x-1 \geqq 0, y-1 \geqq 0, z-1 \geqq 0$ ってなるよね。

$x+y+z=8$ は $(x-1)+(y-1)+(z-1)=5$ となります。

ここまで式変形をできたら、$x-1, y-1, z-1$ の 0 以上の整数解の個数だったら、0 以上になったんだからさっきの仕切りの手法で解くことができるよね。

たまにこの説明では分からない人もいます。これで分からなかったら $x-1=X, y-1=Y, z-1=Z$ とでも置き換えたら分かりやすいですよ。

こうすると $X+Y+Z=5, (X \geqq 0,\ Y \geqq 0,\ Z \geqq 0)$ の整数解の個数だったら求めることができるよね。

$X=x-1$ なんだから X の個数と x の個数は当然一致します。

【解答】
$x+y+z=8$
$(x-1)+(y-1)+(z-1)=5$
$x-1 \geqq 0,\ y-1 \geqq 0,\ z-1 \geqq 0$ より、求める整数解の個数は $\dfrac{7!}{2!\,5!}=21$ 個

これが式で解く手法です。もう一つは日本語で考える方法もあります。数式で考えるよりも、リンゴで考えた方が分かりやすいと思うのでリンゴにすることにします。

３人にリンゴ８個を分かる場合の数ですが。一人最低でも１個以上はもらわないといけません。ですから、まずリンゴを一人にひとつずつ渡しておきます。

８個のリンゴを３人にひとつずつ渡すのですから、残ったリンゴの個数は５個です。残りの５個は３人に自由に分けることができます。

もちろん、この場合１個ももらわない人がいてもＯＫですので、今回求める場合の数は５個を３人で分ける (０個の場合もＯＫ) の場合の数と同じです。それでは、解答に進みます。

【解答】

$x + y + z = 8$, $(x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ z \geqq 1)$ の整数解の個数は $X + Y + Z = 5$, $(X \geqq 0,\ Y \geqq 0,\ Z \geqq 0)$ の解の個数と一致するので、$\dfrac{7!}{2!\,5!} = 21$ 個

これで、今回の解説プリントは終わりです。次回は、円順列について基本的な問題を通して解説をしていきます。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com