場合の数　その７

こんにちは、河見賢司です。今回は、場合の数の第７回で場合の数の最終回です。

これまで、場合の数を６回にわたって基本的な問題を中心に解説してきました。これまでの６回で、場合の数の基本事項はもれなく解説しました。今回は、普段高校生に数学を教えていて多くの高校生が理解できない、疑問に思う問題を中心に解説をしたいと思います。

問題１

１０個の要素をもつ集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 78, 9, 10\}$ の部分集合は何個あるか。

【解説】
なんだか、よく分からない問題ですよね。普通に考えるのなら、(i) 要素が０個のとき、(ii) 要素が１個のとき、(iii) 要素が３個のとき … なんて場合わけをして考えていきたくなるかもしれないけど、この場合要素の個数が０個から１０個までの全部で１１通りもあり、場合分けをして解くのは少し面倒くさい …

そこで、少し違った考え方が必要になります。どういうふうに考えるかと言うと、**要素が部分集合に含まれるかどうか**ということから考えていきます。

つまり要素１は、部分集合に含まれる場合と含まれない場合の２通り、要素２も、部分集合に含まれる場合と含まれない場合の２通り、…

すべての要素が、部分集合に含まれるか含まれるかの２通りあるから、求める部分集合の個数は２を 10 回かけ合わせて 2^{10} です。

ちなみに 2^{10} は 1024 です。これはよく出てくるので、覚えておいてください。

【解答】
すべての要素が部分集合に含まれる場合と、含まれない場合の２通りがあるので、

求める部分集合の個数は $2^{10} = 1024$ 個

問題２

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 8, 9, 10 の１０個の数から、４個取り出して１列に並べる。そのとき、小さい方から並べると何通りあるか。

【解説】

問題に「１列に並べる」っていう表現があるので順列 (P) の方を使うのかな？なんて思う人も多いと思います。

でも、よく分かんないので、少し考えてみたいと思います。例えば、2, 5, 6, 9 を取りだしたとします。これを小さいほうから並べるので、このとき当然小さい方から４つ並べたら 2, 5, 6, 9 となります。

「なんか、当たり前のことを書いているな」と感じている人もいるとは思いますが、これって一列に並べるといっても小さい方から順に並べるんだから、求める場合の数は要するに１０個の数字から４個を選ぶ場合の数と一致するよね。だから、今回の答えは ${}_{10}C_4$ です。

分かる人にとっては簡単だとは思います。ただ、問題文の「１列に並べる」という表現からすぐに P を使うのかな？と考えてしまう人も多くいます。

この問題に限らず、場合の数では問題に書かれていることに注意してしっかりと考えながら解くようにしてください。それでは、解答に進みます。

【解答】

求める場合の数は、１０個の数字から４個の数字を選び出す場合の数に等しい。よって、${}_{10}C_4 = 210$ 個

問題３

AWAJISIMA の９文字ある。

(1) ９文字すべてを使ってできる順列は何通りあるか

(2) (1) のうちどの A も、どの I よりも左側にあるものは何通りあるか

【解説】

(1) は同じ文字を含む順列なので簡単です。(2) が分からないという人が多いです。で、どのように考えるかというと、結果からいうと AAAI I を同じ文字とみなしたらうまくいきます。

AWAJISIMA の AAAI I を ◯ とします。そうすると AWAJISIMA の文字列は ◯◯◯◯◯WJSM となります。

これを一列に並べます。例えば、◯JS◯◯◯W◯M となったとします。この場合、どの A もどの I より左側にくるので ⒶJSⒶⒶⒾWⒾM

つまり、◯ の中身は自動的に左から順に AAAI I が入るので一意的に決まります。よって、求める場合の数は ◯◯◯◯◯WJSM を一列に並べた場合の数と等しくなります。⇐ この説明でほとんどの人が分かると思います。もし、分からなければもっと自分で実験をしてみて、確かにこれであっているなということを確認してもらったらいいと思います。

【解答】

(1) AWAJISIMA は全部で９文字で、A が３回、I が２回同じ文字が使われているので求める場合の数は $\dfrac{9!}{3!\,2!} = 30240$ 通り

(2) 求める場合の数は、AAAI I を同じ文字とみなしたときにできる場合の数と等しいので、求める場合の数は $\dfrac{9!}{5!} = 3024$ 通り

問題４

(1) １から n までの番号のついた箱が n 個ある。このとき、それぞれの箱に赤、白、青の球のうち、どれか１個を入れて、どの色の球も必ずどれかの箱にいれるように入れるとき、その入れ方は何通りあるか

(2) １から５までの番号のついた箱が５個ある。このとき、それぞれの箱に赤、白、青の球のうち、どれか１個を入れて、どの色の球も必ずどれかの箱にいれるように入れるとき、その入れ方は何通りあるか

【(1) の解説】

この問題は直接求めようとする人もいますが、直接求めるのは少し難しいです。そこで、どのように求めるかと言うと、以下のような関係式を使って求めていきます。

(全体) ＝（３色ともすべて使う）＋（２色のみ使う）＋（１色のみ使う）

⇑ 今回は、赤、白、青の３色の球があります。n 個の箱に１個ずつ球をいれていきます。箱に入れた球の色は上記のような３パターン。

で、今回は（３色ともすべて使う）場合の数を求めるのですが、これは（全体）から（２色のみ使う）場合と（１色のみ使う）場合を引けば求めることができます。

全体の場合の数

１の箱は、赤、白、青の３通り
２の箱は、赤、白、青の３通り
・・・・・
n の箱は、赤、白、青の３通り

上記のようになるので、求める場合の数は３を n 回かけ合わせるので 3^n となります。

（２色のみ使う）場合

例えば赤、白、青のうち赤、白のみを使うとします。その場合、
１の箱は、赤、白の２通り
２の箱は、赤、白の２通り
・・・・・
n の箱は、赤、白の２通り

上記のように、全ての箱で入れ方は２通りあるので、求める場合の数は 2^n かな？と思うかもしれませんが、これには「すべて赤」と「すべて青」の場合も含まれています。今回は、（２色使う）場合を求めているので、「すべて赤」や「すべて青」は１色しか使わないので、当然不適です。

ですから、求める場合の数は 2^n から、「すべて赤」と「すべて青」の２通りを引いた $2^n - 2$ となります。

先ほどは、赤、白の場合を考えました。色は赤、青、白の３通りがあるので２色の選び方は ${}_3\mathrm{C}_2$ の３通りあります。よって、（２色のみ使う）場合の数は、${}_3\mathrm{C}_2 \cdot (2^n - 2)$ となります。

（１色のみ使う）場合

（１色のみ使う）場合、これは簡単です。すべて赤、全て青、すべて白の３通りです。

これで場合の数は求めることができます。全体から（２色のみ使う）場合と（１色のみ使う）場合を引けばいいので、$3^n - 3\cdot(2^n - 2) - 3 = 3^n - 3\cdot 2^n + 3$ が答えです。

【解答】

(1)

求める場合の数は、全体の場合の数から、２色のみ使う場合と１色のみ使う場合を引けばいいので

$3^n - 3\cdot(2^n - 2) - 3 = 3^n - 3\cdot 2^n + 3$ 通り

(2)

これは、(1) の答えに $n = 5$ を代入するだけです。

(1) に $n = 5$ を代入して、$3^5 - 3\cdot 2^5 + 3 = 150$ 通り

問題５

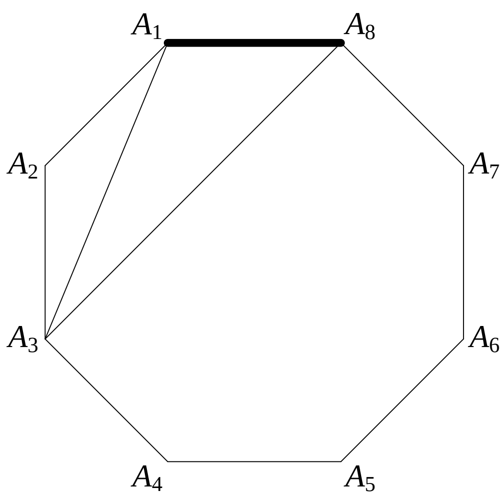
正八角形の３つの頂点を結んでできる三角形のうち

(1) 正八角形と１辺を共有する三角形は何個あるか

(2) 正八角形と２辺を共有する三角形は何個あるか

(3) 正八角形と辺を共有しない三角形は何個あるか

【(1) の解説】



上図のように八角形と A_1A_8 のみを共有する三角形を求めたいと思います。

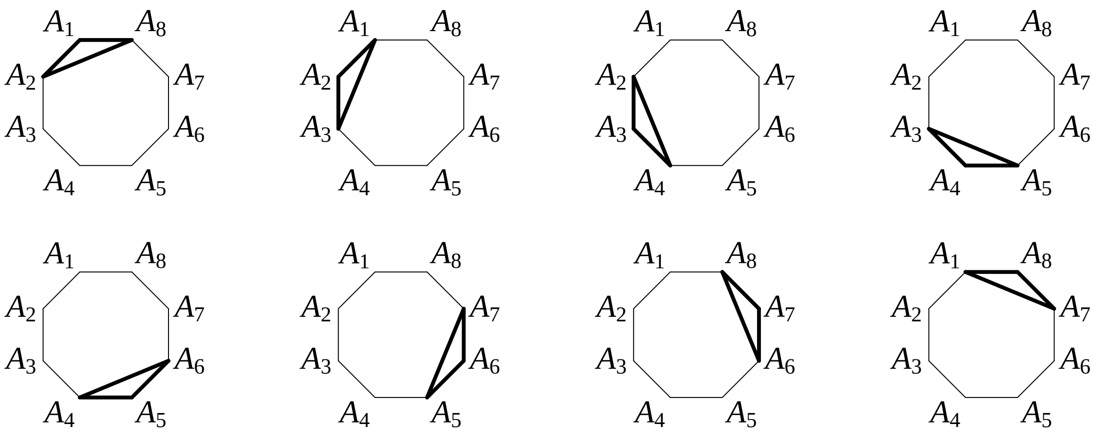
A_1A_8 以外にもう一つ頂点を選びます。これが両隣の A_2 や A_7 を選ぶと八角形と２辺を共有してしまうので、頂点の選び方は A_2, A_7 以外の A_3 から A_6 までの４通りです。

よって、八角形と A_1A_8 のみを共有する三角形の選び方は全部で４通りです。

八角形なので全部で８辺あります。さっき求めたように１辺を共有する三角形は１辺あたり４個なので全部で $4 \times 8 = 32$ 個存在します。

【(1) の解答】
A_1A_8 で１辺のみ共有する三角形は４個。残り８辺あるので、$4 \times 8 = 32$ 個

【(2) の解答】
２辺を共有するのは、次のようになるときです。



上記の８パターンあるので８個 $\Leftarrow$ 念のため８個すべて書きましたけど、こんなの書かなくても分かるよね。

また n 角形と２辺を共有する三角形の個数は n 個です。これも図で考えれば明らかですが覚えておけばいいと思います。

【(2) の解答】
８個

【(3) の解説】
これは問題４と同じように余事象で考えます。

（全体）＝（１辺も共有しない）＋（１辺のみを共有する）＋（２辺を共有する）

上記のようになるので、（１辺も共有しない）は（全体）から（１辺のみを共有する）と（２辺のみを共有する）を引けば求めることができます。

全体ですが、８個の頂点から３つを選べば自動的に三角形はできるので $_8C_3$ となります。

【(３)の解答】
１辺も共有しないのは、全体から１辺のみを共有するものと２辺のみを共有するものをひいたた求めることができる。

$_8C_3 - 32 - 8 = 16$ 個

これで、場合分けのプリントは終わりです。全部で７回解説をしてきましたがどうでしたでしょうか？

問題は基本的なものを中心に扱ったので、これだけでは決して十分ではありません。

しかし、場合訳の考え方としてはかなり詳しく解説をしたので、このプリントの内容をしっかりと理解できていたら、程度の高い問題集でも独学で進めることができると思います。もっともっと勉強をして、場合の数を得意単元にしてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com