

場合の数 その7

こんにちは、河見賢司です。今回は、場合の数の第7回で場合の数の最終回です。

これまで、場合の数を6回にわたって基本的な問題を中心に解説してきました。これまでの6回で、場合の数の基本事項はもれなく解説しました。今回は、普段高校生に数学を教えている多くの高校生が理解できない、疑問に思う問題を中心に解説をしたいと思います。

問題1

10個の要素をもつ集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ の部分集合は何個あるか。

【解説】

なんだか、よく分からない問題ですね。普通に考えるのなら、(i) 要素が0個のとき、(ii) 要素が1個のとき、(iii) 要素が3個のとき … なんて場合わけをして考えていきたくなるかもしれないけど、この場合要素の個数が0個から10個までの全部で11通りもあり、場合分けをして解くのは少し面倒くさい…

そこで、少し違った考え方が必要になります。どういうふうにかかると、要素が部分集合に含まれるかどうかということから考えていきます。

つまり要素1は、部分集合に含まれる場合と含まれない場合の2通り、要素2も、部分集合に含まれる場合と含まれない場合の2通り、…

すべての要素が、部分集合に含まれるか含まれるかの2通りあるから、求める部分集合の個数は2を10回かけ合わせて 2^{10} です。

ちなみに 2^{10} は1024です。これはよく出てくるので、覚えておいてください。

【解答】

すべての要素が部分集合に含まれる場合と、含まれない場合の2通りがあるので、

求める部分集合の個数は $2^{10} = 1024$ 個

問題 2

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 の 10 個の数から、4 個取り出して 1 列に並べる。そのとき、小さい方から並べると何通りあるか。

【解説】

問題に「1 列に並べる」という表現があるので順列 (P) の方を使うのかな？なんて思う人も多いと思います。

でも、よく分かんないので、少し考えてみたいと思います。例えば、2, 5, 6, 9 を取りだしたとします。これを小さいほうから並べるので、このとき当然小さい方から 4 つ並べたら 2, 5, 6, 9 となります。

「なんか、当たり前のことを書いているな」と感じている人もいるとは思いますが、これって一列に並べるといっても小さい方から順に並べるんだから、求める場合の数は要するに 10 個の数字から 4 個を選ぶ場合の数と一致するよね。だから、今回の答えは ${}_{10}C_4$ です。

分かる人にとっては簡単だとは思いますが。ただ、問題文の「1 列に並べる」という表現からすぐに P を使うのかな？と考えてしまう人も多くいます。

この問題に限らず、場合の数では問題に書かれていることに注意してしっかりと考えながら解くようにしてください。それでは、解答に進みます。

【解答】

求める場合の数は、10 個の数字から 4 個の数字を選び出す場合の数に等しい。よって、 ${}_{10}C_4 = 210$ 個

問題 3

AWAJISIMA の 9 文字ある。

- (1) 9 文字すべてを使ってできる順列は何通りあるか
- (2) (1) のうちどの A も、どの I よりも左側にあるものは何通りあるか

【解説】

(1) は同じ文字を含む順列なので簡単です。(2) が分からないという人が多いです。で、どのように考えるかということ、結果からいうと AAII を同じ文字とみなしたらうまくいきます。

AWAJISIMAのAAAIを○とします。そうするとAWAJISIMAの文字列は○○○○○WJSMとなります。

これを一列に並べます。例えば、○JS○○○W○Mとなったとします。この場合、どのAもどのIより左側にくるのでⒶJSⒶⒶⒾWⒾM

つまり、○の中身は自動的に左から順にAAAIが入るので一意的に決まります。よって、求める場合の数は○○○○○WJSMを一列に並べた場合の数と等しくなります。←この説明でほとんどの人が分かると思います。もし、分からなければもっと自分で実験をしてみて、確かにこれであるということを確認してもらいたいと思います。

【解答】

- (1) AWAJISIMA は全部で9文字で、Aが3回、Iが2回同じ文字が使われているので求める場合の数は $\frac{9!}{3!2!} = 30240$ 通り
- (2) 求める場合の数は、AAAIを同じ文字とみなしたときにできる場合の数と等しいので、求める場合の数は $\frac{9!}{5!} = 3024$ 通り

問題4

- (1) 1から n までの番号のついた箱が n 個ある。このとき、それぞれの箱に赤、白、青の球のうち、どれか1個を入れて、どの色の球も必ずどれかの箱に入れるように入れるとき、その入れ方は何通りあるか
- (2) 1から5までの番号のついた箱が5個ある。このとき、それぞれの箱に赤、白、青の球のうち、どれか1個を入れて、どの色の球も必ずどれかの箱に入れるように入れるとき、その入れ方は何通りあるか

【(1)の解説】

この問題は直接求めようとする人もいますが、直接求めるのは少し難しいです。そこで、どのように求めるかと言うと、以下のような関係式を使って求めていきます。

(全体) = (3色ともすべて使う) + (2色のみ使う) + (1色のみ使う)

↑今回は、赤、白、青の3色の球があります。 n 個の箱に1個ずつ球をいれていきます。箱に入れた球の色は上記のような3パターン。

で、今回は(3色ともすべて使う)場合の数を求めるのですが、これは(全体)から(2色のみ使う)場合と(1色のみ使う)場合を引けば求めることができます。

全体の場合の数

1の箱は、赤、白、青の3通り
2の箱は、赤、白、青の3通り
.....
 n の箱は、赤、白、青の3通り

上記のようになるので、求める場合の数は3を n 回かけ合わせるので 3^n となります。

(2色のみ使う)場合

例えば赤、白、青のうち赤、白のみを使うとします。その場合、
1の箱は、赤、白の2通り
2の箱は、赤、白の2通り
.....
 n の箱は、赤、白の2通り

上記のように、全ての箱で入れ方は2通りあるので、求める場合の数は 2^n かな?と思うかもしれませんが、これには「すべて赤」と「すべて青」の場合も含まれています。今回は、(2色使う)場合を求めているので、「すべて赤」や「すべて青」は1色しか使わないので、当然不適です。

ですから、求める場合の数は 2^n から、「すべて赤」と「すべて青」の2通りを引いた $2^n - 2$ となります。

先ほどは、赤、白の場合を考えました。色は赤、青、白の3通りがあるので2色の選び方は ${}_3C_2$ の3通りあります。よって、(2色のみ使う)場合の数は、 ${}_3C_2 \cdot (2^n - 2)$ となります。

(1色のみ使う)場合

(1色のみ使う)場合、これは簡単です。すべて赤、全て青、すべて白の3通りです。

これで場合の数は求めることができます。全体から（2色のみ使う）場合と（1色のみ使う）場合を引けばいいので、 $3^n - 3 \cdot (2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$ が答えです。

【解答】

(1)

求める場合の数は、全体の場合の数から、2色のみ使う場合と1色のみ使う場合を引けばいいので

$$3^n - 3 \cdot (2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \text{ 通り}$$

(2)

これは、(1)の答えに $n = 5$ を代入するだけです。

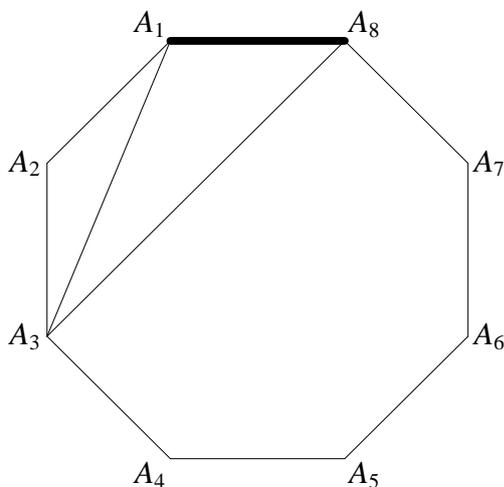
(1)に $n = 5$ を代入して、 $3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 = 150$ 通り

問題 5

正八角形の3つの頂点を結んでできる三角形のうち

- (1) 正八角形と1辺を共有する三角形は何個あるか
- (2) 正八角形と2辺を共有する三角形は何個あるか
- (3) 正八角形と辺を共有しない三角形は何個あるか

【(1)の解説】



上図のように八角形と A_1A_8 のみを共有する三角形を求めたいと思います。

A_1A_8 以外にもう一つ頂点を選びます。これが両隣の A_2 や A_7 を選ぶと八角形と 2 辺を共有してしまうので、頂点の選び方は A_2, A_7 以外の A_3 から A_6 までの 4 通りです。

よって、八角形と A_1A_8 のみを共有する三角形の選び方は全部で 4 通りです。

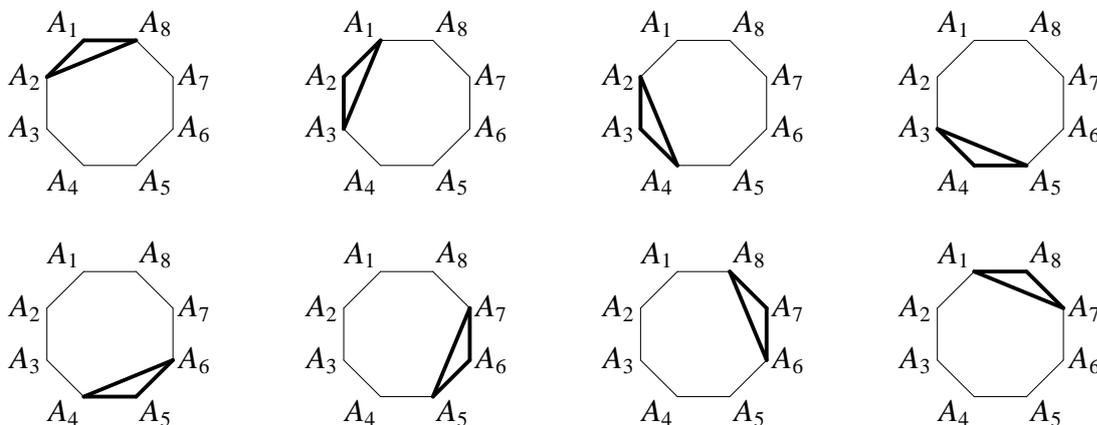
八角形なので全部で 8 辺あります。さっき求めたように 1 辺を共有する三角形は 1 辺あたり 4 個なので全部で $4 \times 8 = 32$ 個存在します。

【(1) の解答】

A_1A_8 で 1 辺のみ共有する三角形は 4 個。残り 8 辺あるので、 $4 \times 8 = 32$ 個

【(2) の解答】

2 辺を共有するのは、次のようになるときです。



上記の 8 パターンあるので 8 個 ← 念のため 8 個すべて書きましたけど、こんなの書かなくても分かるよね。

また n 角形と 2 辺を共有する三角形の個数は n 個です。これも図で考えれば明らかですが覚えておけばいいと思います。

【(2) の解答】

8 個

【(3) の解説】

これは問題 4 と同じように余事象で考えます。

$$(\text{全体}) = (\text{1 辺も共有しない}) + (\text{1 辺のみを共有する}) + (\text{2 辺を共有する})$$

上記のようになるので、(1辺も共有しない)は(全体)から(1辺のみを共有する)と(2辺のみを共有する)を引けば求めることができます。

全体ですが、8個の頂点から3つを選べば自動的に三角形はできるので ${}_8C_3$ となります。

【(3)の解答】

1辺も共有しないのは、全体から1辺のみを共有するものと2辺のみを共有するものをひいたた求めることができる。

$${}_8C_3 - 32 - 8 = 16 \text{ 個}$$

これで、場合分けのプリントは終わりです。全部で7回解説をしてきましたがどうでしたでしょうか？

問題は基本的なものを中心に扱ったので、これだけでは決して十分ではありません。

しかし、場合訳の考え方としてはかなり詳しく解説をしたので、このプリントの内容をしっかりと理解できていたら、程度の高い問題集でも独学で進めることができます。もっともっと勉強をして、場合の数を得意単元にしてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com