

数学の鉄則「文字消去するときの注意点」

今回のテーマは「文字消去するときの注意点」です。

今回のテーマに進む前にまずは次のことを覚えておいてください。

関数の最大値・最小値問題の考えかた

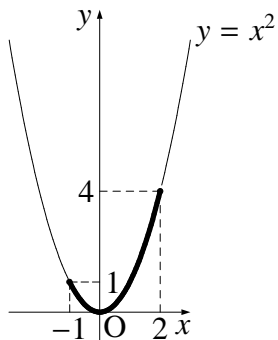
関数の最大値・最小値の問題ではグラフをかいて考える！

簡単だとは思いますが次の例題をまずは解いてみてください。

例題 1

$y = x^2$ の $-1 \leq x \leq 2$ における最大値と最小値とそれを与える x の値をそれぞれ求めよ

【解答】



グラフより最大値 4 ($x = 2$) , 最小値 0 ($x = 0$) をとる。

このように関数の最大値・最小値の問題はグラフをかいたら一目瞭然です。ですから、関数の最大値・最小値の問題ではグラフをかいて考えるようにしてください。

では、次に以下の問題を解いてください。

例題 2

$x + y = 2$ のとき、 $x^2 + y^2$ の最大値・最小値が存在するときは、その値を求めよ。また最大値または最小値を与える x, y の値をそれぞれ求めよ。

【解説】

これも関数の最大値・最小値問題だからグラフをかいて考えたいよね。でも、 $x^2 + y^2$ は x, y と 2 つの変数があるからグラフをかけない …

ここで次のことを思い出してほしい。

「数学の鉄則 1」で説明したと思うけど、数学では、変数(文字)が多ければ多いほどとにかく考えづらい、変数(文字)を消去できるときは、なによりもまず変数(文字)を消去する(これがよくわからないという人は「文字消去」<http://www.hmg-gen.com/mojisyoukyo.pdf> でしっかりと勉強して下さい)ということを説明したよね。

今回は $x^2 + y^2$ で変数が x と y のふたつだよね。

$x + y = 2$ っていう条件から $y = 2 - x$ を $x^2 + y^2$ の y に $y = 2 - x$ を代入したら $x^2 + y^2$ は $x^2 + (2 - x)^2$ ってなるよね。

$x^2 + y^2$ の変数は x と y のふたつだったのに、 $x^2 + (2 - x)^2$ は変数が x のみになってくれて考えやすくなった。

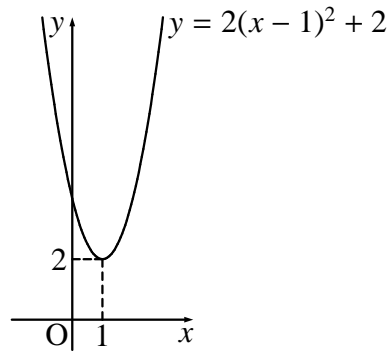
$x^2 + (2 - x)^2$ だったら、変数が x のみだから簡単にグラフをかけるよね。

再確認ですが、数学では変数が多ければ考えづらい、とにかく変数を減らせるときは減らしてから考えるようにしてください。このことを踏まえて解答に進みます。

【解答】

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 \\ &= x^2 + (2 - x)^2 \quad \leftarrow y = 2 - x \text{ を代入して変数を } x \text{ のみにした} \\ &= x^2 + x^2 - 4x + 4 \\ &= 2x^2 - 4x + 4 \\ &= 2(x^2 - 2x) + 4 \\ &= 2(x - 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

↑ 最大最少はグラフを書くことが基本。2次関数でグラフをかくには平方完成。



グラフより最大値なし、最小値 2 ($x = 1$)
また $x + y = 2$ より、 $x = 1$ のとき $y = 1$

∴ 最大値なし、最小値 2 ($x = 1, y = 1$)

ここまではほとんどの人が解けるとと思います。ここからが今回理解してほしい内容です。基本的な内容ですので、理解できている人も多いと思います。

でも、普段数学を教えていてこのあたりの方が適当な人が本当に多いです。分かるよって人も確認のため、しっかりと見ておいてください。

例題 3

$8x + y^2 = 8$ のとき、 $x^2 + y^2$ の最小値とそれを与える x, y をそれぞれ求めよ。

【解説】

まず考え方なんだけど、この問題も $x^2 + y^2$ で変数が 2 つあるから考えにくい。そこで文字消去できるときは、文字消去するんだったよね。

$$8x + y^2 = 8 \text{ から } x = \frac{8 - y^2}{8} \text{ と式変形して、} x^2 + y^2 \text{ に代入したら } x^2 + y^2 = \left(\frac{8 - y^2}{8}\right)^2 + y^2 \text{ と}$$

したら確かに変数は y のみの式になって考えやすくなるんだけど、これは4次式だよな。

でも $8x + y^2 = 8$ から $y^2 = 8 - 8x$ として $x^2 + y^2$ に代入したら $x^2 + y^2 = x^2 + (8 - 8x)$ となり2次式でしょ。

このことは今度ゆっくりと解説したいと思うけど、数学では一般的に次数が高ければ高いほど考えにくいという鉄則があるんだ。2次式と4次式では当然2次式のほうが考えやすいよね。

最大最小問題ではグラフをかいて解いていくんだけど、2次式なら2次関数だから簡単にグラフはかけるけど、4次式の場合4次関数(4次関数は範囲としては数学3になります。数学2で勉強する学校もありますが…)になるから面倒臭いよね。

だから文字を消去するときは、できるだけ次数が低くなるようにもって行ってください。

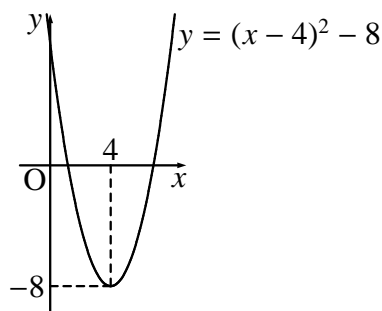
長々と説明しましたが、ここからが今回の本番です。まずはよくある誤解例をかいておきます。

【誤解例】

$$8x + y^2 = 8 \text{ より } y^2 = 8 - 8x \cdots \textcircled{1}$$

①を $x^2 + y^2$ に代入すると

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + (8 - 8x) \leftarrow \textcircled{1} \text{ を } x^2 + y^2 \text{ に代入した} \\ &= (x - 4)^2 - 8 \leftarrow \text{グラフをかくために平方完成をした} \end{aligned}$$



グラフより $x = 4$ のとき、最小値 -8 をとる

上記の誤解例のどこがおかしいか分かるかな？ここが今回のポイントです。

$y^2 = 8 - 8x$ を代入したんだけど、 y^2 は2乗なんだから当然0以上 (←2乗は0以上) だよ
ね。

$y^2 = 8 - 8x$ だから y^2 と $8 - 8x$ は等しい。そして $y^2 \geq 0$ なんだから、当然 $8 - 8x$ も $8 - 8x \geq 0$ っ
ている条件が成り立つ (← $y^2 \geq 0$ に $y^2 = 8 - 8x$ を代入したらそうなる) よね。

上記の誤解例では、文字消去したにもかかわらず、消去した文字の範囲を考えるのを忘
れたから間違ってしまったんだ。

そこで次のことを覚えておいてください。

文字を消去したときの注意点

文字消去したときは、消去した文字の範囲を必ず確認する

このことは本当に重要です。文字を消去したときはとにかく消去した文字の範囲を必ず
確認するようにしておいてください。

このことを踏まえて解答に進みます。

【解答】

$$8x + y^2 = 8 \text{ より } y^2 = 8 - 8x \cdots \textcircled{1}$$

$$y^2 \geq 0 \text{ より } 8 - 8x \geq 0 \quad \blacktriangleleft \text{消去したときは範囲に注意}$$

$$8 - 8x \geq 0$$

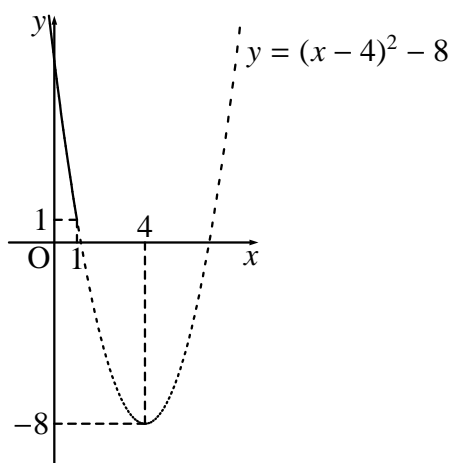
$$-8x \geq -8$$

$$x \leq 1$$

$x^2 + y^2$ に $\textcircled{1}$ を代入して

$$x^2 + y^2 = x^2 + (8 - 8x) \quad \blacktriangleleft y^2 = 8 - 8x \text{ を代入}$$

$$= (x - 4)^2 - 8 \quad \blacktriangleleft \text{平方完成をした(グラフをかくために)}$$



グラフより $x = 1$ のとき、最小値 1 をとる。

また $y^2 = 8 - 8x$ に $x = 1$ を代入すると $y = 0$

以上より最小値は 1 ($x = 1, y = 0$)

今回も本当に基本的ですが意外にできていない人が多いです。文字を消去するときは必ず消去する文字の範囲に注意するということを覚えておいてください。

重要なのでもう一度かいておきます。

文字を消去したときの注意点

文字消去したときは、消去した文字の範囲を必ず確認する

今回はこれでおしまいです。ここまでプリントを読んでいただきありがとうございます。これからもがんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com