2次関数No2.「平行移動」

今回は2次関数の第2回、平行移動を解説します。

平行移動については、次のことを覚えてください。

平行移動

$y = f(x)$ を x 軸方向に $+p$, y 軸方向に $+q$ 平行移動したら $y - q = f(x - p)$ となる。

では、今覚えたことを使って次の問題を解いてみてください。

問題1

関数 $y = 2x^2 - 4x + 1$ を x 軸方向に $+2$, y 軸方向に -1 平行移動させたときの関数を求めよ。

【解説】
この問題は、上の赤枠でくくった「平行移動」を使うだけです。x 軸方向に $+2$、y 軸方向に -1 なので x に $x-2$ を y に $y-(-1)$ に置き換えるだけです。

【解答】
$y = 2x^2 - 4x + 1$ を x 軸方向に $+2$, y 軸方向に -1 平行移動させたので

$y - (-1) = 2(x-2)^2 - 4(x-2) + 1$ ◀ x を $x-2$ と、y を $y-(-1)$ と置き換えた

$y + 1 = 2(x^2 - 4x + 4) - 4(x-2) + 1$

$y = 2x^2 - 8x + 8 - 4x + 8$

$= 2x^2 - 8x + 16$ ◀ これが答え

平行移動は簡単ですよね。今回は2次関数で説明していますが、この平行移動は2次関数だけでなく、すべての関数の平行移動について成り立ちます。平行移動と言えば、上記のようなことを思い出すようにしておいてください。

2次関数の平行移動なんですけど、実はもうひとつの解き方があります。それは頂点を使って求める方法です。たとえば、$y = a(x-s)^2 + t$ っていう2次関数の頂点は (s, t) これを x 軸方向に $+p$、y 軸方向に $+q$ 平行移動すると頂点が $(s+p, s+q)$ ってなるよね。これより $y = a(x-s)^2 + t$ を平行移動すると $y = a\{x - (s+p)\}^2 + (s+q)$ となります。

では、この頂点を使って平行移動する解き方を使って問題 1 を解いてみます。

【別解】
$y = 2x^2 - 4x + 1 = 2(x-1)^2 - 1$ より頂点は $(1, -1)$、この関数を x 軸方向に $+2$、y 軸方向に -1 平行移動させたとき頂点は $(1+2, -1-1) = (3, -2)$ にうつる。よって求める 2 次関数は

$$
\begin{aligned}
y &= 2(x-3)^2 - 2 \\
&= 2(x^2 - 6x + 9) - 2 \\
&= 2x^2 - 12x + 16
\end{aligned}
$$
◀ これが答え

2 次関数の平行移動に関しては上記のように 2 通りあります。$y - q = f(x-p)$ を使う解き方と、頂点を使って求める方法どちらが簡単かは問題によって違ってきます。2 次関数の平行移動を問題を解くときは、解く前にどっちの解法が簡単か考えてから解くようにしてください。

今回の最後の問題、平行移動と対称移動の融合問題です。対称移動に関しては、前回解説しました。もし分からないという人は、「2 次関数 No1. 『対称移動』」http://www.hmg-gen.com/taisyouidou.pdf を見ておいてください。

問題 2

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを x 軸方向に -2, y 軸方向に $+2$ 平行移動し, さらにそれを x 軸対称移動したところ放物線 $y = 2x^2 + x + 1$ が得られた。このとき, a, b, c の値をそれぞれ求めよ。

【解説】
この問題を解いてみてというとほとんどの人が、$y = ax^2 + bx + c$ を x 軸方向に -2、y 軸方向に $+2$ 平行移動したものは・・・、って解くと思います。もちろんこれでも解けないことはないんだけど $y = ax^2 + bx + c$ は文字式だから式変形するのは少しメンドウになる。

そこで、逆から考えていきます。つまり $y = 2x^2 + x + 1$ の方から式変形していきます。

$y = ax^2 + bx + c$ を x 軸方向に -2、y 軸方向に $+2$ 平行移動させ x 軸対称移動したら $y = 2x^2 + x + 1$ になるんだよね。逆から考えれば $y = 2x^2 + x + 1$ を x 軸対称して、さらに x 軸方向に $+2$、y 軸方向に -2 平行移動したら $y = ax^2 + bx + c$ になるんじゃない。これを使って解いていきます。

【解答】
$y = 2x^2 + x + 1$ を x 軸対称して、さらに x 軸方向に $+2$、y 軸方向に -2 平行移動したら $y = ax^2 + bx + c$ となる。

$y = 2x^2 + x + 1$ を x 軸対称すると、
$-y = 2x^2+x+1 \Rightarrow\ y = -2x^2-x-1$ ◂ $y = f(x)$ を x 軸対称移動すると $-y = f(x)$ より

$y = -2x^2 - x - 1 - 1$ を x 軸方向に $+2$、y 軸方向に -2 平行移動すると

$y - (-2) = -2(x-2)^2 - (x-2) - 1$ ◂ y を $y-(-2)$、x を $x-2$ に置き換えた

$y + 2 = -2(x^2 - 4x + 4) - (x-2) - 1$

$y = -2x^2 + 8x - 8 - x + 2 - 1 - 2$

$= -2x^2 + 7x - 9$ ◂ これが答え

今回は文字式を変形するのは面倒だからと違う方法を考えました。これは意外によく出てきます。数学は同じ問題でも問題の解き方によってまったく計算量が違ってくるということが多いです。

数学の問題を解いていて、解法が思いついたとしても、その解法の計算が面倒なもの（面倒そう）なものであったら、いきなりその解法で解いていくのではなくて、少しだけでいいのでほかにもっと簡単な解法がないかと考えるクセをつけるようにしておいてください。今後、この考え方は本当に重要になってきます。

平行移動はこれでおしまいです。2 次関数の問題で平行移動が出題されるときは、問題 2 と同じように対称移動と融合問題として出題されることが多いです。プリントをやってもらって分かったと思いますが、本当に簡単です。センター試験等、受験ではよく出題されるところなのでしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

少し難しくなると解けなくなる人のための高校数学勉強法
http://www.hmg-gen.com/

何か感想をくれると嬉しいです。
magdai@hmg-gen.com