

因数分解 1 「公式の確認」

今回のテーマは「因数分解」です。因数分解を5回にわたって解説していきます。

因数分解は、大学受験ではそれほど頻出というわけではないですが、基礎の中の基礎です。数学を教えていて、因数分解がきちっとできない人が多くて本当にびっくりさせられます。

因数分解に関しては、今後5回にわたって解説しますが、それさえこなせば完璧です。解法がワンパターンで決まっています。その解法をひとつずつ丁寧に覚えていってください。

因数分解

(I) 公式を使えるものは公式を適用する。

(II) 共通因数があるときは共通因数でくくりだす。

係数が同じもの同士をくくるとうまくいく場合が多い。

$$ex \quad x^2 + 2x - y^2 - 2y$$

$$=x^2 - y^2 + 2(x - y) \quad \blacktriangleleft \text{と} \text{り} \text{あ} \text{え} \text{ず} \text{係} \text{数} \text{の} \text{同} \text{じ} \text{もの} \text{同} \text{士} \text{を} \text{ペア} \text{に} \text{し} \text{た}$$

$$=(x + y)(x - y) + 2(x - y) \quad \blacktriangleleft x - y \text{ という共通因数ができた}$$

$$=(x - y)\{(x + y) + 2\} \quad \blacktriangleleft \text{共通因数}(x - y) \text{ でくくりだした}$$

$$=(x - y)(x + y + 2)$$

(III) (I)(II) でできないときは、最低次の文字で整理する。

(i) 最低次の文字の次数が1のとき、最低次の文字で整理したあと、共通因数でくくりだす。

(注) 最低次の文字が1次のときは必ず共通因数がでてきます。(そうでないといと因数分解ができない! 必ず共通因数ができるのでなんとかして共通因数を見つけだすこと)

(ii) 最低次の文字の次数が2のとき、最低次の文字で整理したあとたすきがけをつかって因数分解する。

(注) 最低次の文字の次数が3次以上のときは、最低次の文字で整理してもうまくいかないことが多いです。最低次の文字の次数が3次以上の時は(I)の公式を適用するか、(II)の共通因数でくくりだすパターンが多いです。

(IV) 上記の方法でできないときは必ず $()^2 - ()^2$ になってくれているので、

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) \text{ の公式を使って因数分解をする。}$$

因数分解の解法は1ページでまとめました。

(I) (II) (III-i) (III-ii) (IV) の5通りです。

今回は(I)の「公式を使えるときは公式を適用して因数分解」を解いていてもらいます。

因数分解に必要な公式をすべてまとめました。まずはこの公式をすべて覚えてください。

展開・因数分解の公式

$$\textcircled{1} (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$\textcircled{2} (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\textcircled{3} (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$\textcircled{4} (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$\textcircled{5} (x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$\textcircled{6} x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$\textcircled{7} x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$\textcircled{8} (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\textcircled{9} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

①～③は中学校で勉強する内容なので、知らない人はほとんどいないと思います。

④～⑦は高校生になってから初めて勉強するものですが、覚えていない人や間違っ覚えてちゃっている人が意外に多いんです。しっかりと覚えておいてください。

ここでは関係ないけど、「数学ができない」と言ってくる生徒ほど覚えるべき事柄をまったく覚えていないことが多いです。そういう人たちにかぎって「数学はセンスだから」なんて言います。

でも、違うよ。確かにセンスもあるけど、それは公式等覚えるべきことをまずはしっかりと覚えてから言う事。覚えるべきことを覚えるだけで、数学的センスなんかなくても中堅レベルの大学なら対応できるよ。センスうんぬん言う前にまずは覚えるべき事柄をしっかりと覚えるようにしてください。(説教臭くてすみません、でもこういう人本当に多いんです。私のプリントでも赤枠で囲ったところは本当に重要なのでしっかりと覚えていってください)

⑧に関しては公式として覚えていない人が多いけど、よく出てくるのでこれも公式として覚えておいてください。この公式を導くのも簡単だけどたまに出てきます。それに導

き方を知らない人が意外に多いので一応、導いてみます。

----- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ の証明-----

【考え方】

まず今回は $()^2$ の中身が $a + b + c$ と3項あるよね。3項は考えにくいから、2項にして考えたいんだ。

3項を2項にするには文字の置き換えを利用します。たとえば $a + b = A$ とでも置き換えたなら $a + b + c = A + c$ ってなって3項から2項になってくれたよね。

今回に限らず文字の展開の場合3項以上では考えにくいので、文字を置き換えることによって2項に直してから解いていくことが多いので、しっかりと理解しておいてください。

【証明】

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (A + c)^2 \leftarrow a + b = A \text{ と置き換えて 2 項にした} \\ &= A^2 + 2Ac + c^2 \leftarrow \text{展開をした} \\ &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \leftarrow A = a + b \text{ を代入} \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \leftarrow \text{展開した} \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \leftarrow \text{整理して証明終了！}\end{aligned}$$

最後の⑨これは因数分解の公式だから一応載せておいたけど、この公式を使うのはおもに対称式のときです。

対称式が分からないという人は、対称式のプリント <http://www.hmg-gen.com/taisyouyousiki.pdf> でも見ておいてください。

この公式を導くのはかなり難しいです。一応、導いておきますが、分からない人は別にいいです。でも、この公式の結果だけはしっかりと覚えておくようにしてください。そうしないと、3文字の対称式で $a^3 + b^3 + c^3$ の値を求めなさいといった頻出問題が解けなくなってしまいます。

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \text{ の証明}$$

【解説】

この問題は、対称式の式変形 $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ を使って式変形します。
この式変形が分からないという人は、
対称式のプリント <http://www.hmg-gen.com/taisyouosiki.pdf> を見ておいてください。

【証明】

$$\begin{aligned}
 & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
 &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc \quad \leftarrow \text{対称式の式変形 } x^3 + y^3 = \dots \text{ を使った} \\
 &= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc \quad \leftarrow \text{順番を並び替えた} \\
 &= A^3 + c^3 - 3abA - 3abc \quad \leftarrow \text{見やすくするために } a + b = A \text{ と置き換えた} \\
 &= (A + c)^3 - 3Ac(A + c) - 3ab(A + c) \\
 & \quad \uparrow A^3 + c^3 \text{ の方は対称式の式で変形、 } -3abA - 3abc \text{ の方は } -3ab \text{ でくくった} \\
 &= (a + b + c)^3 - 3(a + b)c(a + b + c) - 3ab(a + b + c) \quad \leftarrow A = a + b \text{ を代入した} \\
 &= (a + b + c)\{(a + b + c)^2 - 3(a + b)c - 3ab\} \quad \leftarrow (a + b + c) \text{ でくくった} \\
 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 3ca - 3bc - 3ab) \quad \leftarrow \text{展開した} \\
 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \quad \leftarrow \text{整理して証明終了！}
 \end{aligned}$$

今回はあえて問題は解きません。公式を使った因数分解は公式さえ覚えられていたら簡単に解けますから、問題をする必要はないと思います。

今回やることは、まずしっかりと公式を完璧に覚えておくことです。似ている公式が多く、間違いやすいので気を付けて覚えるようにしてください。

次回は解法 (II) の共通因数を使った因数分解を解説します。

河見賢司

数学の偏差値を 50 から 60 にするサイト

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください (何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com