

因数分解2「共通因数でくくりだす」

今回は因数分解の第2回。「共通因数でくくりだす」という手法を解説していきます。

因数分解の解法はおもに5通りあります。これに関しては以下のプリントを見てください。因数分解の解法 <http://www.hmg-gen.com/insuu1.pdf>

今日は「共通因数でくくりだす」手法を解説します。共通因数があればそれらをくくりだすことにより、簡単に因数分解することができます。

$$a(x-2) + b(x-2)$$

$$=(x-2)(a+b) \leftarrow \text{共通因数 } (x-2) \text{ でくくりだして因数分解終了！}$$

上の因数分解が共通因数がくくりだす因数分解のなかで、一番簡単なタイプだと思えます。「当たり前だよ」という人がほとんどだと思いますが、中には理解できていない人もいますので、そういった人のために一応解説をしておきます。文字の置き換えをしたら理解できると思います。

$$a(x-2) + b(x-2)$$

$$\text{ここで } x-2 = A \text{ とする}$$

$$=aA + bA$$

$$=A(a+b) \leftarrow A \text{ でくくった。}$$

$$=(x-2)(a+b) \leftarrow x-2 = A \text{ を代入して、因数分解終了！}$$

上記のように文字を置き換えて解いたら分かるよね。でも、文字の置き換えは面倒臭いから、できるだけ文字の置き換えなしに解けるようになっておいてください。

では、次の問題を解いてください。

練習 1.

$$(x-2)^2 + 3(x-2) \text{ を因数分解せよ。}$$

【解説】

$(x-2)^2 + 3(x-2)$ には $(x-2)$ っていう共通因数があるよね。これでくくっていきだけです。

【解答】

まずは置き換えて解いていきます。

$$(x-2)^2 + 3(x-2)$$

$$x-2 = X \text{ とする}$$

$$=X^2 + 3X$$

$$=X(X+3) \leftarrow X \text{ でくくった}$$

$$=(x-2)\{(x-2)+3\} \leftarrow X = x-2 \text{ を代入した}$$

$$=(x-2)(x+1) \leftarrow \text{整理して因数分解終了}$$

はじめてなので一応置き換えましたが、これくらいは置き換えなしでできるようにできるようになってください。それでは、置き換えしないで解いてみます。

【解答】

$$(x-2)^2 + 3(x-2)$$

$$=(x-2)\{(x-2)+3\} \leftarrow \text{共通因数 } (x-2) \text{ でくくった}$$

$$=(x-2)(x+1) \leftarrow \text{整理して因数分解終了}$$

さきほどの問題では、元から共通因数があるタイプの問題でした。でも、共通因数が元からあるものは少ないです。共通因数は自分で見つけていけないといけないのです。最初のうちは共通因数をなかなか見つけられないかもしれませんが、慣れてくると一瞬で分かるようになります。簡単だとは思いますが、次の問題を解いてみてください。

問題

$$(a-b)x + 2(b-a)y \text{ を因数分解せよ}$$

【解説】

今回はさっきの問題と違って共通因数がない。でも $(a-b)$ と $(b-a)$ っていうほとんど同じものがあるよね。 $(b-a) = -(a-b)$ したら共通因数がでてくるよね。簡単だとは思いますが、よく出るパターンだから覚えておいてください。

【解答】

$$(a-b)x + 2(b-a)y$$

$$=(a-b)x - 2(a-b)y \leftarrow 2(b-a) = -2(a-b) \text{ より強引に共通因数 } (a-b) \text{ を作った}$$

$$=(a-b)(x-2y) \leftarrow \text{共通因数 } (a-b) \text{ でくくりだして因数分解終了!}$$

練習問題として次の問題を解いてみてください。

練習 2.

$2a(x - y) + 3b(y - x)$ を因数分解せよ。

【解説】

これは簡単だね。 $3b(y - x) = -3b(x - y)$ とすると共通因数 $(x - y)$ が出てきてくれます。では、解答に進みます。

【解答】

$$\begin{aligned} & 2a(x - y) + 3b(y - x) \\ = & 2a(x - y) - 3b(x - y) \quad \leftarrow 3b(y - x) = -3b(x - y) \text{ より強引に共通因数 } (x - y) \text{ を作った} \\ = & (x - y)(2a - 3b) \quad \leftarrow \text{共通因数 } (x - y) \text{ でくくりだして因数分解終了！} \end{aligned}$$

ここまでは簡単だったと思います。次にする問題が今回理解してほしい内容です。では、次の問題を解いてみてください。

問題

$3x^3 - 2x^2 - 2x + 3$ を因数分解せよ。

【解説】

この問題も共通因数を見つけてから因数分解をしていきます。だから、共通因数をなんとか見つけられないといけないんだけど … なかなか分かんないよね。

実は共通因数を見つけるにはポイントがあります。

今回の問題は項数も少ないから、このポイントを知らなくてもなんとなく共通因数を見つけられた人もいますが、次のポイントをまずはしっかりと覚えておいてください。

共通因数の見つけ方

共通因数を見つけるには、係数の絶対値が同じもの同士をペアにするとうまくいく場合が多い。

この考えより、今回は $3x^3 - 2x^2 - 2x + 3$ の係数の絶対値が等しいもの同士をペアにするんだから $3x^3 + 3$ と $-2x^2 - 2x$ をペアにしたらいいんだよね。

$3x^3 + 3 = 3(x^3 + 1) = 3(x + 1)(x^2 - x + 1)$ で $-2x^2 - 2x = -2x(x + 1)$ でともに $(x + 1)$ っている因数をもつから共通因数が $(x + 1)$ になるよね。

このように共通因数を見つけるには、とりあえず係数の絶対値の等しいもの同士をペアにするということを覚えておいてください。

それから、係数の絶対値の同じもの同士をペアにするっていったけど、ペアにしたからといって必ずしも共通因数が表れるというものではないよ。もちろん出てこないこともある。

数学の解き方で、勘違いしている人が多いけど、「数学のできる人は、問題の解き方がすべて分かっている」というわけじゃない。

数学のできる人がどういうふうに考えているかというと、使えそうな解法を考えてしらみつぶしでやっているんだ。たとえば、A という解法でできそうなら A でやってみて、それでできなかつたら次の解法を考える。それを解けるまで繰り返す。何も最初から解法が思いついているわけじゃなくて、とりあえずできそうな解法をしらみつぶしで考えてる。

このことは本当に重要だから覚えておいてね。それでは解答に進みます。

【解答】

$$\begin{aligned} & 3x^3 - 2x^2 - 2x + 3 \\ &= 3(x^3 + 1) - 2x(x + 1) \quad \blacktriangleleft \text{とりあえず係数の絶対値が等しいもの同士をペアにした} \\ &= 3(x + 1)(x^2 - x + 1) - 2x(x + 1) \quad \blacktriangleleft \text{共通因数 } (x + 1) \text{ が表れた} \\ &= (x + 1)\{3(x^2 - x + 1) - 2x\} \quad \blacktriangleleft \text{共通因数 } (x + 1) \text{ でくくりだした} \\ &= (x + 1)(3x^2 - 3x + 3 - 2x) \\ &= (x + 1)(3x^2 - 5x + 3) \quad \blacktriangleleft \text{整理して因数分解終了！} \end{aligned}$$

答えの $(x + 1)(3x^2 - 5x + 3)$ の $(3x^2 - 5x + 3)$ の部分は因数分解ができないんだけど、必ず因数分解ができないってことを確認しておいてね。

因数分解は、できるところまで因数分解をしないといけないんだ。例えば $x^4 - 1$ を因数分解せよという問題で $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ で止めたらダメ。 $(x^2 - 1)$ は $(x - 1)(x + 1)$ っってもう一度因数分解できるからね。

共通因数でくくりだして因数分解終了と思うんじゃないくて、出た答えがもう一度因数分解できないか必ず確認するようにしてください。

では、次の練習問題を解いてください。さっき話したポイントさえ理解できていたら簡単だと思います。

問題 3.

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^2 - b^2 + 2a - 2b$

(2) $x^3 + 5x^2 - 5x - 1$

【解答】

(1) $a^2 - b^2 + 2a - 2b$

$= (a^2 - b^2) + 2(a - b)$ ◀ 係数の絶対値の等しいもの同士をペアにした

$= (a - b)(a + b) + 2(a - b)$ ◀ 共通因数 $(a - b)$ が表れた

$= (a - b)\{(a + b) + 2\}$ ◀ 共通因数 $(a + b)$ でくくりだした

$= (a - b)(a + b + 2)$ ◀ 整理して因数分解終了！

(2) $x^3 + 5x^2 - 5x - 1$

$= (x^3 - 1) + 5(x^2 - x)$ ◀ 係数の絶対値の等しいもの同士をペアにした

$= (x - 1)(x^2 + x + 1) + 5x(x - 1)$ ◀ $(x - 1)$ という共通因数が表れた

$= (x - 1)\{(x^2 + x + 1) + 5x\}$ ◀ 共通因数 $(x - 1)$ でくくりだした

$= (x - 1)(x^2 + 6x + 1)$ ◀ 整理して因数分解終了！

今回は、共通因数でくくりだす因数分解の解法を解説しました。次回は、最低次の次数が1次のときの因数分解を解説します。

実は、この最低次の次数が1次のときの因数分解の解法で解いていけば今回のような考え方をしなくても共通因数が見つかるので、今回解説した内容を理解していなくても、因数分解は解くことができます。

それでもあえてこの共通因数でくくるやりかたを解説したかということ、次のポイントをしっかりと覚えておいてほしいからです。

共通因数の見つけ方

共通因数を見つけるには、係数の絶対値が同じもの同士をペアにするとうまくいく場合が多い。

今回は因数分解だったから「係数の絶対値が同じもの」だったけど、高校数学では一般に同じようなものをペアにするとうまくいくことが多いということを覚えてほしかったんです。

例えば無理数があれば無理数同士をペアにします。虚数があれば虚数同士をペアにします。とにかく似ている感じのものをペアにすればうまくいくことが多いです。

また、係数の絶対値が等しいもの同士をペアにしても必ずうまくいくわけではない、ということを文中ではなしましたが、無理数や虚数でも同じように、いつもうまくいくとは限りません。

でも、同じようなものをペアにするとうまくいくことが多いので、うまくいくかどうか分からなくてもとりあえずペアにしてみる（もしそれでうまくいかなかったらそれから別の解法を考える）ということをしっかりと覚えておいてください。

今回は上記のことをよく覚えておいてほしいからあえて共通因数をつかった因数分解という項目をつくりました。問題自体は簡単ですが、言っていることは本当に重要です。しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

数学の偏差値を50から60にするサイト

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com