因数分解3
「最低次が１次のときの因数分解」

今回は因数分解の第3回。「最低次が1次のときの因数分解」という手法を解説していきます。

因数分解の解法はおもに5通りあります。第1回でも解説しましたが、もう一度復習として書いておきます。

因数分解

(Ｉ) 公式を使えるものは公式を適用する。

(II) 共通因数があるときは共通因数でくくりだす。
→係数が同じもの同士をくくるとうまくいく場合が多い。

$ex\quad x^2+2x-y^2-2y$

$=x^2-y^2+2(x-y)$ ◀ とりあえず係数の同じもの同士をペアにした

$=(x+y)(x-y)+2(x-y)$ ◀ $x-y$ という共通因数ができた

$=(x-y)\{(x+y)+2\}$ ◀ 共通因数 $(x-y)$ でくくりだした

$=(x-y)(x+y+2)$

(III) (I)(II) でできないときは、最低次の文字で整理する。

(ｉ) 最低次の文字の次数が1のとき、最低次の文字で整理したあと、共通因数でくくりだす。
(注) 最低次の文字が1次のときは必ず共通因数がでてきます。(←そうでないと因数分解ができない！必ず共通因数ができるのでなんとかして共通因数を見つけだすこと)

(ii) 最低次の文字の次数が2のとき、最低次の文字で整理したあとたすきがけをつかって因数分解する。
(注) 最低次の文字の次数が3次以上のときは，最低次の文字で整理してもうまくいかないことが多いです。最低次の文字の次数が3次以上の時は (I) の公式を適用するか、(II) の共通因数でくくりだすパターンが多いです。

(IV) 上記の方法でできないときは必ず $(\ )^2-(\ )^2$ になってくれているので、
$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ の公式を使って因数分解をする。

因数分解の解法は (I) (II) (III-i) (III-ii) (IV) の5通りです。

今回は (III-i) の「最低次の文字が 1 次のときの因数分解」を解いていってもらいます。

因数分解には 5 通りあるといいましたが、実際の入試問題で出題されるのはほとんどの場合、(III-i) か (III-ii) の最低次で整理する因数分解です。今回は入試でよくでるタイプのうちの (III-i) を解説します。重要なところなので、しっかりと理解しておいてください。

まず最低次といっても理解できな人もいると思うので次数の復習を簡単にしておきたいと思います。

中学校のときの復習ですが、次数とは文字の数のことです。ab は文字が 2 つあるので次数は 2、a^2b は a がふたつ b がひとつ、文字の数はあわせて 3 つあるので次数は 3 です。

$x^3 + x^2 + x + 1$ のように和・差の形になっているときの次数は項のなかで最も高いものになります。

$x^3 + x^2 + x + 1$ での次数は x^3 は 3 次、x^2 は 2 次、x は 1 次、1 は 0 次。次数は一番高いものになるので $x^3 + x^2 + x + 1$ の次数は 3 次になります。

次に、最初に a^2b は 3 次式といいましたが、a^2b は a に着目すると 2 次式になります。a に着目するとは a のみを変数とみなし、a 以外の文字を定数とみなすということです。

a^2b では a に着目したときの次数を考える場合、変数は a のみとなり、b を定数とみなします。a^2b の b は定数（数字と同じように考えられる）なので次数には影響しません。よって、a^2b の a に着目したときの次数は 2 次。また b に着目したときは、1 次になります。

これまでの練習として $3x^3y + y^2x$ の x に着目したときの次数と y に着目したときの次数を求めたいきます。

まずは x に着目したとき。x に着目したときの各項の次数は $3x^3y$ は 3 次、y^2x は 1 次となります。次数は項のなかで最も高いものになるので $3x^3y + y^2x$ の x に着目したときの次数は 3 になります。

次に y に着目します。y に着目したとき各項の次数は $3x^3y$ は 1 次、y^2x は 2 次となるので、$3x^3x + y^2x$ の y に着目したときの次数は 2 になります。

次に「◯◯ について整理せよ」の話をします。この「◯◯」について整理せよとは簡単にいえば ◯◯ について降べきの順に並べなさいよということです。

また中学校のときの復習です。x^2+4x^3+3x+1 を降べきの順に並べなさいと言われたら次数の大きいものから順番に書くんだったよね。だから降べきの順になればると $4x^3+x^2+3x+1$ となります。

次に $x^2+3x+4x^2+2x+7$ を降べきの順にしていきます。

$x^2+3x+4x^2+2x+7$

$=(1+4)x^2+(3+2)x+7$ ◀ 次数が同じもの同士をくくった

$=5x^2+5x+7$

「○○ について整理せよ」とは上記のような作業をすることです。文字が含まれると急にできなくなる人が多いですが、やっていることは数字の場合と同じです。もし、文字式で分からなければ数字に戻って考え方を理解してから、もう一度文字式で考えるようにしてください。

補題

$2x^2+3xy+y^2-5x-2y-3\cdots$①

(1) ①を x について整理せよ。　　(2) ①を y について整理せよ。

【解説】

(1) については x の 2 次式は $2x^2$ のみ、x の 1 次式は $3xy$ と $-5x$、定数項 (x を含まない式) は y^2-2y-3 となります。

(2) については y の 2 次式は y^2 のみ、y の 1 次式は $3xy$ と $-2y$、定数項 (y を含まない式は) $2x^2-5x-3$ となります。

【解答】

(1) $2x^2+3xy+y^2-5x-2y-3$

$=2x^2+(3y-5)x+y^2-2y-3$ ◀ x について整理した

(2) $2x^2+3xy+y^2-5x-2y-3$

$=y^2+(3x-2)y+2x^2-5x-3$ ◀ y について整理した

ここまでで準備は終了しました。ここからが今回の本題です。今回は、最低次で整理する因数分解のうちで、最低次の次数が 1 次のものを解説します。

最低次の次数が 1 次のときは、最低次の文字で整理すると必ず共通因数があらわれます（←そうじゃないと因数分解できない）

まれではありますが、整理したのに共通因数が見つかりにくい時もあります。でも、共通因数ができないと因数分解できないのだから、必ず共通因数があるはずです。そういった場合は、定数項を因数分解するなりしたら共通因数がでてくることが多いです。気づきにくい問題も、「共通因数が絶対にでてくるはず」と考えれば共通因数がみつかるはずです。

問題

次の式を因数分解せよ。

(1) $xy - 3x + 4y - 12$　　(2) $a^2 - bc + ca - b^2$

(3) $x^2 - xy + 2yz - 4z^2$　　(4) $2ab^2 - 3ab - 2a + b - 2$

(1)

【解説】

$xy - 3x + 4y - 12$ の次数をみます。x は 1 次、y も 1 次。因数分解の基本は最低次の文字で整理することなんだけど、今回は両方とも 1 次なんで x, y どっちで整理してもらってもいいです。でも、こういうときはアルファベット順に x で整理することが多いです。ですから今回も x で整理して解いていきます。（もちろん y も最低次なんだから y で整理しても因数分解できるよ）

【解答】

$xy - 3x + 4y - 12$

$=(y - 3)x + 4y - 12$ ◀ 最低次の x で整理した

$=(y - 3)x + 4(y - 3)$ ◀ 共通因数 $(y - 3)$ ができた

$=(y - 3)(x + 4)$ ◀ 共通因数 $(y - 3)$ でくくりだし因数分解終了！

(2)

【解説】

$a^2 - bc + ca - b^2$ の次数をみます。a は 2 次、b は 2 次、c は 1 次なので、次数の最も低い c で整理していきます。

【解答】

$a^2 - bc + ca - b^2$

$=(a-b)c + a^2 - b^2$ ◀ 最低次の c で整理した

$=(a-b)c + (a+b)(a-b)$ ◀ $a^2 - b^2$ を因数分解した。$(a-b)$ という共通因数ができた (注)

$=(a-b)\{c + (a+b)\}$ ◀ 共通因数 $(a-b)$ でくくりだした

$=(a-b)(a+b+c)$ ◀ 整理して因数分解終了！

(注)最低次で整理した後、定数項を因数分解できる場合には定数項を因数分解します

(3)

【解説】

$x^2 - xy + 2yz - 4z^2$ の次数をみます。x は 2 次、y は 1 次、z は 2 次なので、次数の最も低い y で整理していきます。

【解答】

$x^2 - xy + 2yz - 4z^2$

$=(2z-x)y + (x^2 - 4z^2)$ ◀ 最低次の y で整理した

$= -(x-2z)y + (x+2z)(x-2z)$ ◀ 共通因数 $(x-2z)$ ができた (注)

$=(x-2z)\{-y + (x+2z)\}$ ◀ 共通因数 $x-2z$ でくくりだした

$=(x-2z)(x-y+2z)$ ◀ 整理して因数分解終了！

(注)$(2z-x) = -(x-2z)$ アルファベット順の方が分かりやすいので、こういった場合できるだけアルファベット順にしていきます

(4)
【解説】
$2ab^2 - 3ab - 2a + b - 2$ の次数をみます。a は 1 次、b は 2 次なので、次数の最も低い a で整理していきます。

【解答】

$2ab^2 - 3ab - 2a + b - 2$

$=(2b^2 - 3b - 2)a + b - 2$ ◀ 最低次の a で整理した

(注) ここから少し難しいんだけど、最低次が 1 次のときは必ず共通因数がみつかります。定数項は $(b - 2)$ なんだから、どう考えても共通因数が $(b - 2)$ になるはずだよね。だから a の係数 $2b^2 - 3b - 2$ も $b - 2$ を因数にもってくれます。当然 $2b^2 - 3b - 2$ はたすき掛けをつかって因数分解します。

ここで、$2b^2 - 3b - 2 = (b - 2)(2b + 1)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -2 & \longrightarrow & -4 \\ 2 & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline 2 & & -2 & & -3 \end{array}$$

(与式) $=(b - 2)(2b + 1)a + b - 2$

$=(b - 2)\{(2b + 1)a + 1\}$ ◀ 共通因数 $(b - 2)$ でくくりだした

$=(b - 2)(2ab + a + 1)$ ◀ 整理して因数分解終了

この問題の練習として次のページの問題を解いてください。問題を理解できていたなら簡単だと思います。

練習問題

次の式を因数分解せよ

(1) $x^3 + x^2y - x^2 - y$　(2) $a^2b + b^2c - a^2c - b^3$

(3) $2a^3 + 3a^2b + 6a^2c + ab^2 + 9abc + 3b^2c$　(4) $abc + a^2b - ab^2 - a + b - c$

【解答】

(1) $x^3 + x^2y - x^2 - y$

$=(x^2 - 1)y + x^3 - x^2$ ◀ x は 3 次、y は 1 次。最低次の y で整理した

$=(x + 1)(x - 1) + x^2(x - 1)$ ◀ $(x - 1)$ という共通因数ができた

$=(x - 1)\{(x + 1)y + x^2\}$ ◀ 共通因数 $(x - 1)$ でくくった

$=(x - 1)(x^2 + xy + y)$ ◀ 整理して因数分解終了！

(2) $a^2b + b^2c - a^2c - b^3$

$=(b^2 - a^2)c + (a^2b - b^3)$ ◀ a は 2 次、b は 3 次、c は 1 次。最低次の c で整理した

$= -(a^2 - b^2)c + b(a^2 - b^2)$ ◀ (注) を見よ

$= -(a^2 - b^2)(c - b)$ ◀ 共通因数 $(a^2 - b^2)$ でくくった

$= -(a + b)(a - b)(c - b)$ ◀ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ より

$=(a + b)(a - b)(b - c)$ ◀ 整理して因数分解終了！

(注) について $b^2 - a^2 = -(a^2 - b^2)$ アルファベット順にしたほうが見やすいのでアルファベット順に変形した

(3)　$2a^3+3a^2b+6a^2c+ab^2+9abc+3b^2c$

$=(6a^2+9ab+3b^2)c+2a^3+3a^2b+ab^2$ ◀ 最低次の c で整理した

$=3(2a^2+3ab+b^2)c+a(2a^2+3ab+b^2)$ ◀ それぞれ整理して、共通因数 $2a^2+3ab+b^2$ ができた

$=(2a^2+3ab+b^2)(3c+a)$ ◀ 共通因数 $2a^2+3ab+b^2$ でくくった

ここで $2a^2+3ab+b^2=(a+b)(2a+b)$ より

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & \diagdown\!\!\!\diagup & 1 & \longrightarrow & 2 \\
2 & \diagup\!\!\!\diagdown & 1 & \longrightarrow & 1 \\
\hline
2 & & 1 & & 3
\end{array}
$$

(与式) $=(a+b)(2a+b)(a+3c)$ ◀ 因数分解終了！

(注) よく答えを $(2a^2+3ab+b^2)(3c+a)$ で止めてしまう人が多いが、因数分解というものはできるだけ簡単にしないといけない。だから、まだ因数分解できるときはもう一度因数分解をしないといけない。慣れるまでは忘れやすいと思うけど、因数分解ができたときもう一度因数分解ができないか、必ず確認をするようにしてください。

(4)　$abc+a^2b-ab^2-a+b-c$ を因数分解せよ。

【解説】

この問題は少し難しいので解説を加えます。

まずこの問題も最低次の文字で整理していきます。今回は a と b が 2 次、c が 1 次なので c で整理していきます。

c で整理すると与式は $(ab-1)c+a^2b-ab^2-a+b$ となります。最低次が 1 次の因数分解のときは、整理したら必ず共通因数ができるんだったよね。今回は $(ab-1)c$ ってところから考えて共通因数は $(ab-1)$ になりそう。

a^2b-ab^2-a+b を因数分解したとき $(ab-1)$ っていう因数をもつはずなんだけど、この因数分解はできる？次回、解説する最低次が 2 次のときの因数分解を使えば解けるけど、この問題は前回解説した因数分解の第 2 回「共通因数でくくりだす」という解法で解くことができるよ。少しやってみます。

a^2b-ab^2-a+b の因数分解

「因数分解第２回、共通因数でくくりだす」では、「絶対値の係数の等しいものをペアにするとうまくいく」ということを話しました。最後の方で**似ているものはペアにするとうまくいくことが多い**という話をしました。

今回は a^2b-ab^2 と $-a+b$ をペアにするとうまくいきます。なぜかっていうと a^2b と $-ab^2$ は互いに３次式でしょ。そして $-a$ と b は互いに１次式。うまくいくかどうかは分からないけど、とりあえず似ているもの同士をペアにしてみるっていうのが鉄則だったよね。このことを知っていれば解けない問題ではないと思います。

a^2b-ab^2-a+b

$=(a^2b-ab^2)-(a-b)$ ◀ 似たもの同士をペアにした

$=ab(a-b)-(a-b)$ ◀ 共通因数 $(a-b)$ ができた

$=(a-b)(ab-1)$ ◀ 共通因数でくくって因数分解終了！

以上のことを踏まえ、$abc+a^2b-ab^2-a+b-c$ の因数分解に進みます。

【解答】

$abc+a^2b-ab^2-a+b-c$

$=(ab-1)c+a^2b-ab^2-a+b$ ◀ 最低次の c で整理した

$=(ab-1)c+ab(a-b)-(a-b)$

$=(ab-1)c+(a-b)(ab-1)$ ◀ 共通因数 $(ab-1)$ ができた

$=(ab-1)\{c+(a-b)\}$ ◀ 共通因数 $(ab-1)$ でくくった

$=(ab-1)(a-b+c)$

今回は、これで終わりです。次回は「因数分解第４回『最低次が２次のとき』」を解説します。因数分解の問題で一番重要なところです。それではがんばってください。

河見賢司

数学の偏差値を５０から６０にするサイト
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com