因数分解４
「最低次が２次のときの因数分解」

今回は因数分解の第４回。「最低次が２次のときの因数分解」という手法を解説していきます。

因数分解の基本は最低次の文字で整理することです。そして最低次の次数は１次のときと、２次のときの２パターンあります。１次のときは第三回で解説しました。まだ勉強していないひとは、http://www.hmg-gen.com/insuu3.pdf で勉強しておいてください。

最低次が２次のときは、最低次の文字で整理したあとたすきがけを利用して因数分解をしていきます。本当にワンパータンに解けてしまいます。

たすきがけが文字を含んでいるので、文字を含んだたすきがけをやったことがないという人にとっては、少し難しいかもしれません。ですが、文字を含んでいてもたすきがけのやり方は数字のみのときとまったく同じです。問題を少しこなせばすぐにできるようになります。このプリントさえできれば、このタイプの因数分解で困ることはなくなると思います。それではがんばって勉強して下さい。

問題

$x^2+4xy+3y^2-3x-7y+2$ を因数分解せよ。

【解答】
$x^2+4xy+3y^2-3x-7y+2$ を因数分解せよっていう問題だけど、公式が使えなくて、パッと見で共通因数がないときは最低次の文字で整理するんだったよね（←分からないという人は因数分解１ http://www.hmg-gen.com/insuu1.pdf 参照）。今回は、公式も共通因数もダメそうだから最低次の文字で整理していきます。

$x^2+4xy+3y^2-3x-7y+2$ の次数を見てみると x は２次、y も２次と同じ次数だからどっちの文字で整理してもいいんだけど、普通アルファベット順で考えて x で整理していきます。

$x^2+4xy+3y^2-3x-7y+2$
$=x^2+(4y-3)x+3y^2-7y+2$ ◀ 最低次の x で整理した

今回は最低次が２次のときの因数分解を解説しているんだけど、最低次が２次のとき定数項がさらに因数分解できることが多いです。今回の定数項は $3y^2-7y+2$ なんだけど、これは因数分解できます。因数分解できるときは必ず因数分解するようにしてください。

$3y^2 - 7y + 2 = (y-2)(3y-1)$

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & -2 & \longrightarrow & -6 \\
3 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\
\hline
3 & & 2 & & -7
\end{array}
$$

$x^2 + 4xy + 3y^2 - 3x - 7y + 2$
$= x^2 + (4y-3)x + 3y^2 - 7y + 2$ ◀ x で整理した
$= x^2 + (4y-3)x + (y-2)(3y-1)$ ◀ $3y^2 - 7y + 2$ を因数分解した

ここまでで最低次が 2 次のときの因数分解の準備は終了です。ここからはたすきがけを使って解いていくだけです。今回は x で整理したので、あくまで y は定数です。文字を含んだたすきがけですが、数字の場合のたすきがけとまったく同じようにすることができます。

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & & y-2 & \longrightarrow & y-2 \\
1 & & 3y-1 & \longrightarrow & 3y-1 \\
\hline
 & & & & 4y-3
\end{array}
$$

$= \{x + (y-2)\}\{x + (3y-1)\}$
$= (x + y - 2)(x + 3y - 1)$ ◀ 整理して因数分解終了

最低次が 2 次の因数分解は、整理したあとたすきがけをして因数分解をします。解き方はまったく同じです。最初のうちは難しいかもしれません。とにかく演習を繰り返して慣れていってください。

練習 1．

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 4xy + 3y^2 + x - y - 2$　　(2) $2x^2 + 8xy + 6y^2 - x + y - 1$

(3) $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 5x + 4y - 2$　　(4) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x - y + 3$

【解答】
(1)
$x^2 + 4xy + 3y^2 + x - y - 2$
$= x^2 + (4y+1)x + 3y^2 - y - 2$ ◀ 最低次の x で整理した
$= x^2 + (4y+1) + (y-1)(3y+2)$ ◀ $3y^2 - y - 2 = (y-1)(3y+2)$ と因数分解した
*定数項 (今回の定数項は $3y^2 - y - 2$) が因数分解できるときは因数分解するんだったよね

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & y-1 & \longrightarrow & y-1 \\ 1 & \times & 3y+2 & \longrightarrow & 3y+2 \\ \hline & & & & 4y+1 \end{array}$$

$= \{x + (y - 1)\}\{x + (3y + 2)\}$

$= (x + y - 1)(x + 3y + 2)$ ◀ 整理して因数分解終了！

(2)

$2x^2 + 8xy + 6y^2 - x + y - 1$

$= 2x^2 + (8y - 1)x + 6y^2 + y - 1$ ◀ 最低次 x で整理した

$= 2x^2 + (8y - 1)x + (2y + 1)(3y - 1)$ ◀ 定数項 $6y^2 + y - 1 = (2y + 1)(3y - 1)$ と因数分解した

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 3y-1 & \longrightarrow & 6y-2 \\ 2 & \times & 2y+1 & \longrightarrow & 2y+1 \\ \hline & & & & 8y-1 \end{array}$$

$= \{x + (3y - 1)\}\{2x + (2y + 1)\}$

$= (x + 3y - 1)(2x + 2y + 1)$ ◀ 整理して因数分解終了！

(3)

$3x^2 - 5xy - 2y^2 + 5x + 4y - 2$

$= 3x^2 + (-5y + 5)x - 2y^2 + 4y - 2$

*よく $(-5y + 5)x$ のところを因数分解した形 $-5(y - 1)$ とする人がいるけど、x の 1 次式の項は因数分解する必要はないよ。ていうかむしろしたらメンドウになるだけです。たすきがけでやっていることを思いだしたら分かると思いますが、定数項は因数分解される必要があるけど、x の 1 次式の項は因数分解しても意味がありません。

$= 3x^2 + (-5y + 5)x - 2(y^2 - 2y + 1)$

$= 3x^2 + (-5y + 5)x - 2(y - 1)^2$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -2(y-1) & \longrightarrow & -6(y-1) \\ 3 & \times & y-1 & \longrightarrow & y-1 \\ \hline & & & & -5y+5 \end{array}$$

*今回のたすきがけはちょっと気づきにくかったかもしれません。たすきがけはとにかく問題数をこなして慣れてもらうしかないんですが、今回のポイントとしては、かけて $-2(y - 1)^2$ となるところです。

-2 はとりあえずあとで考えるとして $-2(y-1)^2$ の $(y-1)^2$ の部分をかけてつくるには 1 と $(y - 1)^2$ か $(y - 1)$ と $(y - 1)$ の 2 パターンが考えられます。

そこで定数項を見てほしいんだけど、今回は $-5y+5$ での 1 次式でしょ。仮に 1 と $(y-1)^2$ のペアで考えたらたすきがけだからクロスにかけるんだけど、 2 次式がでてきちゃうよ

ね。でも、定数項は 1 次式だからこれは不適。だから今回はもうひとつのペア $(y-1)$ と $(y-1)$ にした。その後の -2 は数字を見ながら考えていくしかありません。

たすきがけはほかにもいろいろな考え方があるけど慣れてもらうしかありません。慣れてきたら本当に一瞬で解けるので、それまでがんばってください。

$= \{x-2(y-1)\}\{3x+(y-1)\}$
$= (x-2y+2)(3x+y-1)$ ◀ 整理して因数分解終了！

(4)

$2x^2+3xy-2y^2+7x-y+3$
$= 2x^2+(3y+7)x-2y^2-y+3$
$= 2x^2+(3y+7)x-(2y^2+y-3)$
$= 2x^2+(3y+7)x-(y-1)(2y+3)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 2y+3 & \longrightarrow & 4y+6 \\ 2 & & -(y-1) & \longrightarrow & -y+1 \\ \hline & & & & 3y+7 \end{array}$$

$= \{x+(2y+3)\}\{2x-(y-1)\}$
$= (x+2y+3)(2x-y+1)$ ◀ 整理して因数分解終了！

次に $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$ のような式の因数分解をします。

$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$ は展開してもらえば分かると思うけど、a も b も c 2 次。だから今までやってきた手法で解くことができます。$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$ はなんとなく規則性があるよね。こんなときは答えも規則的な答えになるということを覚えておいてください。少し適当な表現だけど、規則性のある式を因数分解して答えが規則性のない汚い解答だったらそれは間違っているから。

あと答えの書き方なんだけど普通アルファベット順に書くことが多いけど、今回の場合 $ab+bc+ca$ のように書きます。こういうのをサイクリックって言ったりするんだけど、覚えておいてください。

練習２.

次の式を因数分解せよ。

(1) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$　　(2) $(a+1)(b+1)(ab+1)+ab$

(3) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$　　(4) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

【解答】

(1)

*とりあえず展開してから考えます。展開したら分かると思うけど a, b, c すべてが２次なので、a で整理して解いていきます。

$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$=(ab+ac+b^2+bc)(c+a)+abc$

$\Uparrow$ $(a+b)(b+c)(c+a)$ 一気に展開は無理なのでまず $(a+b)(b+c)$ を展開した

$=abc+ac^2+b^2c+bc^2+a^2b+a^2c+ab^2+abc+abc$ ◀ 分配法則で展開した

$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+b^2c+bc^2$ ◀ a で整理した

$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$ ◀ 定数項 $b^2c+bc^2=bc(b+c)$ とまとめた

$$\begin{array}{ccccc} b+c & & bc & \longrightarrow & bc \\ 1 & & b+c & \longrightarrow & (b+c)^2 \\ \hline & & & & b^2+3bc+c^2 \end{array}$$

$=\{a(b+c)+bc\}\{a+(b+c)\}$

$=(ab+ac+bc)(a+b+c)$

$=(ab+bc+ca)(a+b+c)$ ◀ $ab+ac+bc=ab+bc+ca$ とサイクリックな形にして因数分解終了！

(2)

$(a+1)(b+1)(ab+1)+ab$

$=(ab+a+b+1)(ab+1)+ab$

$=a^2b^2+a^2b+ab^2+ab+ab+a+b+1+ab$

$=(b^2+b)a^2+(b^2+3b+1)a+b+1$

$=b(b+1)a^2+(b^2+3b+1)a+b+1$

$$\begin{array}{ccccc} b & & b+1 & \longrightarrow & b^2+2b+1 \\ b+1 & & 1 & \longrightarrow & b \\ \hline & & & & b^2+3b+1 \end{array}$$

$=\{ab+(b+1)\}\{a(b+1)+1\}$

$=(ab+b+1)(ab+a+1)$ ◀ 因数分解終了！

(3)

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=(b-c)a^2+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

＊ここで $a^2(b-c)=a^2b-a^2c$ と展開する人が多いけどこれは展開しなくていいよ。今回は最低次の a で整理するんだから、戻さないといけなくなってかえって面倒臭くなるだけです。

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$ ◀ 最低次の a で整理した。共通因数の $b-c$ ができた

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$ ◀ 共通因数 $(b-c)$ でくくった

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$ ◀ サイクリックな形にするため $(a-c)=-(c-a)$ と変形した。因数分解終了！

(4)

$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

$=a(b^2+2bc+c^2)+b(a^2+2ac+c^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc$

$=ab^2+2abc+ac^2+a^2b+2abc+bc^2+a^2c+2abc+b^2c-4abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$ ◀ a で整理した

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$ ◀ 共通因数 $(b+c)$ ができた

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$ ◀ 共通因数 $(b+c)$ でくくった

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$ ◀ サイクリックな形になおして因数分解終了！

今回はこれで終了です。因数分解が出題されるとしたら今回解説した、最低次が２次の場合が一番多いです。最初のうちは難しいかもしれないですが、本当にワンパターンなのでしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

数学の偏差値を５０から６０にするサイト
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com