

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

因数分解4

「最低次が2次のときの因数分解」

今回は因数分解の第4回。「最低次が2次のときの因数分解」という手法を解説していきます。

公式が使えない、共通因数もみつからない、そんなときの因数分解は最低次の文字で整理していきます。そして最低次の次数は1次のときと、2次のときの2パターンあります。1次のときは第三回で解説しました。まだ勉強していないひとは、<http://www.hmg-gen.com/insuu3.pdf>で勉強しておいてください。

最低次が2次のときは、最低次の文字で整理したあとたすきがけを利用して因数分解をしていきます。本当にワンパターンに解けてしまいます。

たすきがけが文字を含んでいるので、文字を含んだたすきがけをやったことがないという人にとっては、少し難しいかもしれません。ですが、文字を含んでいてもたすきがけのやり方は数字のみのときとまったく同じです。問題を少しこなせばすぐにできるようになります。このプリントさえできれば、このタイプの因数分解で困ることはなくなると思います。それではがんばって勉強して下さい。

問題

$x^2 + 4xy + 3y^2 - 3x - 7y + 2$ を因数分解せよ。

【解説つきの解答】

$x^2 + 4xy + 3y^2 - 3x - 7y + 2$ を因数分解せよっていう問題だけど、公式が使えなくて、パッと見て共通因数がないときは最低次の文字で整理するんだよね（←分からないという人は因数分解1 <http://www.hmg-gen.com/insuu1.pdf> 参照）。今回は、公式も共通因数もダメそうだから最低次の文字で整理していきます。

$x^2 + 4xy + 3y^2 - 3x - 7y + 2$ の次数を見てみると x は2次、 y も2次と同じ次数だからどっちの文字で整理してもいいんだけど、係数の簡単な x で整理していきます。

*最低次数が2次で、今回のように2次となる文字が複数個あるときは、係数が簡単なもので整理した方がラクに因数分解できますよ。

整理したあと、たすきがけで因数分解をします。そのことを考えたら2次の係数がラクな方が計算がラクになる、ということが分かるとおもいます。

ただ、多少計算量が変わる程度です。どっちでやっても解けるので、そこまで気にする必要はないですよ。

$$\begin{aligned} & x^2 + 4xy + 3y^2 - 3x - 7y + 2 \\ & = x^2 + (4y - 3)x + 3y^2 - 7y + 2 \quad \blacktriangleleft \text{最低次の } x \text{ で整理した} \end{aligned}$$

今回は最低次が2次のときの因数分解を解説しているんだけど、最低次が2次のとき定数項がさらに因数分解できることが多いです。今回の定数項は $3y^2 - 7y + 2$ なんだけど、これは因数分解できます。因数分解できるときは必ず因数分解するようにしてください。

$$3y^2 - 7y + 2 = (y - 2)(3y - 1) \quad \begin{array}{r} 1 \quad \times \quad -2 \quad \rightarrow \quad -6 \\ 3 \quad \times \quad -1 \quad \rightarrow \quad -1 \\ \hline 3 \quad \quad \quad 2 \quad \quad -7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & x^2 + 4xy + 3y^2 - 3x - 7y + 2 \\ & = x^2 + (4y - 3)x + 3y^2 - 7y + 2 \quad \blacktriangleleft x \text{ で整理した} \\ & = x^2 + (4y - 3)x + (y - 2)(3y - 1) \quad \blacktriangleleft 3y^2 - 7y + 2 \text{ を因数分解した} \end{aligned}$$

ここまでで最低次が2次のときの因数分解の準備は終了です。ここからはたすきがけを使って解いていくだけです。今回は x で整理したので、あくまで y は定数です。文字を含んだたすきがけですが、数字の場合のたすきがけとまったく同じようにすることがで

きます。

$$\begin{array}{r} 1 \quad \times \quad y-2 \longrightarrow y-2 \\ 1 \quad \times \quad 3y-1 \longrightarrow 3y-1 \\ \hline 4y-3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \{x + (y - 2)\}\{x + (3y - 1)\} \\ &= (x + y - 2)(x + 3y - 1) \quad \blacktriangleleft \text{整理して因数分解終了} \end{aligned}$$

最低次が2次の因数分解は、整理したあとたすきがけをして因数分解をします。解き方はまったく同じです。最初のうちは難しいかもしれませんが。とにかく演習を繰り返して慣れていってください。

練習1.

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 4xy + 3y^2 + x - y - 2$

(2) $2x^2 + 8xy + 6y^2 - x + y - 1$

(3) $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 5x + 4y - 2$

(4) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 7x - y + 3$

【解答】

(1)

$$x^2 + 4xy + 3y^2 + x - y - 2$$

$$= x^2 + (4y + 1)x + 3y^2 - y - 2 \quad \blacktriangleleft \text{最低次の } x \text{ で整理した}$$

$$= x^2 + (4y + 1)x + (y - 1)(3y + 2) \quad \blacktriangleleft 3y^2 - y - 2 = (y - 1)(3y + 2) \text{ と因数分解した}$$

*定数項(今回の定数項は $3y^2 - y - 2$)が因数分解できるときは因数分解するんだったよね

$$\begin{array}{r} 1 \quad \times \quad y-1 \longrightarrow y-1 \\ 1 \quad \times \quad 3y+2 \longrightarrow 3y+2 \\ \hline 4y+1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \{x + (y - 1)\}\{x + (3y + 2)\} \\ &= (x + y - 1)(x + 3y + 2) \quad \blacktriangleleft \text{整理して因数分解終了！} \end{aligned}$$

(2)

$$2x^2 + 8xy + 6y^2 - x + y - 1$$

$$= 2x^2 + (8y - 1)x + 6y^2 + y - 1 \quad \blacktriangleleft \text{最低次 } x \text{ で整理した}$$

$$= 2x^2 + (8y - 1)x + (2y + 1)(3y - 1) \quad \blacktriangleleft \text{定数項 } 6y^2 + y - 1 = (2y + 1)(3y - 1) \text{ と因数分解した}$$

$$\begin{aligned}
&= abc + ac^2 + b^2c + bc^2 + a^2b + a^2c + ab^2 + abc + abc \quad \blacktriangleleft \text{分配法則で展開した} \\
&= (b+c)a^2 + (b^2 + 3bc + c^2)a + b^2c + bc^2 \quad \blacktriangleleft a \text{で整理した} \\
&= (b+c)a^2 + (b^2 + 3bc + c^2)a + bc(b+c) \quad \blacktriangleleft \text{定数項 } b^2c + bc^2 = bc(b+c) \text{ とまとめた}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{ccc}
b+c & \times & bc \longrightarrow bc \\
1 & & b+c \longrightarrow (b+c)^2
\end{array} \\
\hline
b^2 + 3bc + c^2
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \{a(b+c) + bc\}\{a + (b+c)\} \\
&= (ab + ac + bc)(a + b + c) \\
&= (\mathbf{ab + bc + ca})(\mathbf{a + b + c}) \quad \blacktriangleleft ab + ac + bc = ab + bc + ca \text{ とサイクリックな形にして因数分解終了！}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&(a+1)(b+1)(ab+1) + ab \\
&= (ab + a + b + 1)(ab + 1) + ab \\
&= a^2b^2 + a^2b + ab^2 + ab + ab + a + b + 1 + ab \\
&= (b^2 + b)a^2 + (b^2 + 3b + 1)a + b + 1 \\
&= b(b+1)a^2 + (b^2 + 3b + 1)a + b + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{ccc}
b & \times & b+1 \longrightarrow b^2 + 2b + 1 \\
b+1 & & 1 \longrightarrow b
\end{array} \\
\hline
b^2 + 3b + 1
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \{ab + (b+1)\}\{a(b+1) + 1\} \\
&= (\mathbf{ab + b + 1})(\mathbf{ab + a + 1}) \quad \blacktriangleleft \text{因数分解終了！}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\
&= (b-c)a^2 + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2 \\
&* \text{ここで } a^2(b-c) = a^2b - a^2c \text{ と展開する人が多いけどこれは展開しなくていいよ。今回は最低次の } a \text{ で整理するんだから、戻さないといけなくなっただけです。}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (b-c)a^2 - (b^2 - c^2)a + b^2c - bc^2 \\
&= (b-c)a^2 - (b+c)(b-c)a + bc(b-c) \quad \blacktriangleleft \text{最低次の } a \text{ で整理した。共通因数の } b-c \text{ ができた} \\
&= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} \quad \blacktriangleleft \text{共通因数 } (b-c) \text{ でくくった} \\
&= (b-c)(a-b)(a-c) \\
&= \mathbf{-(a-b)(b-c)(c-a)} \quad \blacktriangleleft \text{サイクリックな形にするため } (a-c) = -(c-a) \text{ と変形した。因数分解終了！}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} & a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc \\ &= a(b^2 + 2bc + c^2) + b(a^2 + 2ac + c^2) + c(a^2 + 2ab + b^2) - 4abc \\ &= ab^2 + 2abc + ac^2 + a^2b + 2abc + bc^2 + a^2c + 2abc + b^2c - 4abc \\ &= (b+c)a^2 + (b^2 + 2bc + c^2)a + b^2c + bc^2 \quad \leftarrow a \text{ で整理した} \\ &= (b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c) \quad \leftarrow \text{共通因数 } (b+c) \text{ ができた} \\ &= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\} \quad \leftarrow \text{共通因数 } (b+c) \text{ でくくった} \\ &= (b+c)(a+b)(a+c) \\ &= (a+b)(b+c)(c+a) \quad \leftarrow \text{サイクリックな形になおして因数分解終了！} \end{aligned}$$

今回はこれで終了です。因数分解が出題されるとしたら今回解説した、最低次が2次の場合が一番多いです。最初のうちは難しいかもしれませんが、本当にワンパターンなのでしっかりと理解しておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司