

因数分解 5

「 $(\quad)^2 - (\quad)^2$ を使った因数分解」

今回は因数分解の第5回。「 $(\quad)^2 - (\quad)^2$ を使った因数分解」です。

これまで公式を使った因数分解、共通因数でくくりだす因数分解、最低次の文字で整理する因数分解を解説していきました。

因数分解のほとんどすべては上記の解法で解けます。今回解説する「 $(\quad)^2 - (\quad)^2$ を使った因数分解」は慣れてくると、この解法で解いていくということにすぐに気づけると思いますが、最初のうちは気づきにくいことも多いと思います。

因数分解の問題ではまず上記のような公式、共通因数、最低次で整理する解法で考えてみて、それでもうまくいきそうにないときは今回の「 $(\quad)^2 - (\quad)^2$ を使った因数分解」で解けるのではないかと考えるようにしてください。

まずは次のような問題を解いてみてください。

問題 1

$x^4 + x^2 + 1$ を因数分解せよ

【解説】

まず今回の問題だけど、公式も使えそうにないし、共通因数もなさそう、最低次で整理することもなさそう（最低次でそろえるのは最低次の次数が1か2のときだったよね。今回は最低次は4だから最低次でそろえる解法は使わない）

そんなときは $(\quad)^2 - (\quad)^2$ を使った解法で解いていきます。

この解法を使うには $(\quad)^2 - (\quad)^2$ の形にならないといけないので、平方完成をするなどして強引に $(\quad)^2 - (\quad)^2$ の形にすることがポイントです。

このことを頭に入れて、解いていきます。

$$\begin{aligned} & x^4 + x^2 + 1 \\ & = (x^4 + x^2) + 1 \end{aligned}$$

↑ $(\quad)^2 - (\quad)^2$ にしないといけないので、 $(x^4 + x^2)$ を強引に $(\quad)^2$ の形にしてみることにした

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right\} + 1 \quad \leftarrow \text{強引に 2 乗の形にした} \\
&= \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\
&= \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad \leftarrow \text{??これでは } (\)^2 - (\)^2 \text{ の形になってくれない}
\end{aligned}$$

とりあえず $(\)^2 - (\)^2$ の形がでてくれるように強引に $(\)^2$ の形にしたけど、これでは $(\)^2 - (\)^2$ の形になってくれないよね。そこで、違うペアでやってみることにします。

$$\begin{aligned}
&x^4 + x^2 + 1 \\
&= (x^4 + 1) + x^2
\end{aligned}$$

↑さっき $(x^4 + x^2)$ で 2 乗を作ったらうまくいかなかったので今度は $(x^4 + 1)$ で作ってみることにした

$$\begin{aligned}
&= \{(x^2 + 1)^2 - 2x^2\} + x^2 \quad \leftarrow \text{強引に } (\)^2 \text{ の形を作った} \\
&= (x^2 + 1)^2 - x^2 \quad \leftarrow (\)^2 - (\)^2 \text{ の形になった} \\
&= \{(x^2 + 1) + x\}\{(x^2 + 1) - x\} \quad \leftarrow A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \text{ の公式を使った} \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \quad \leftarrow \text{整理して因数分解終了！}
\end{aligned}$$

$(\)^2 - (\)^2$ の形にするにはペアの取り方やプラスマイナスの取り方をうまくしないとダメなことが多いです。上記でもやってみましたが、とりあえず式変形をしてみてもうまくいかないようなら違うペアでやってみるようにしてください。

では、次の練習問題を解いてください。

練習 1

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4 + 4$

(2) $x^4 + 4x^2 + 16$

(3) $x^4 - 13x^2y^2 + 4y^4$

(4) $4x^4 + 11x^2y^2 + 9y^4$

(1)

$$\begin{aligned}
&x^4 + 4 \\
&= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 \quad \leftarrow \text{強引に 2 乗の形を作った} \\
&= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \quad \leftarrow (\)^2 - (\)^2 \text{ の形になった} \\
&= \{(x^2 + 2) + 2x\}\{(x^2 + 2) - 2x\} \quad \leftarrow A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \text{ の公式を使った} \\
&= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \quad \leftarrow \text{整理して因数分解終了！}
\end{aligned}$$

(2)

*やってみればわかると思うけど、 (x^4+4x^2) で2乗を作ってもうまくいきません。 (x^4+16) で2乗を作ります。

$$\begin{aligned} & x^4 + 4x^2 + 16 \\ &= (x^4 + 16) + 4x^2 \\ &= \{(x^2 + 4)^2 - 8x^2\} + 4x^2 \\ &= (x^2 + 4)^2 - 8x^2 + 4x^2 \\ &= (x^2 + 4)^2 - 4x^2 \\ &= (x^2 + 4)^2 - (2x)^2 \quad \blacktriangleleft \quad (\quad)^2 - (\quad)^2 \text{の形になった} \\ &= \{(x^2 + 4) + 2x\}\{(x^2 + 4) - 2x\} \quad \blacktriangleleft \quad A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \text{の公式を使った} \\ &= (x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4) \quad \blacktriangleleft \quad \text{整理して因数分解終了！} \end{aligned}$$

(3)

*今回は $(x^4 + 4y^4)$ をペアにして2乗を作っていきます。 $(x^4 + 4y^4) = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2$ としたくなりますが、これではうまく $(\quad)^2 - (\quad)^2$ の形になってくれません。今回は $(x^4 + 4y^4) = (x^2 - 2y^2)^2 + 4x^2y^2$ と変形したらうまくいきます。言われてら気づくと思うけど、最初からはなかなか気づかないよね。とりあえず思いついた解法で解いてみてそれでうまくいかなければ別の解法を考えるとというやり方で解いていってください。

$$\begin{aligned} & x^4 - 13x^2y^2 + y^4 \\ &= (x^4 + 4y^4) - 13x^2y^2 \\ &= \{(x^2 - 2y^2) + 4x^2y^2\} - 13x^2y^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 - 9x^2y^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 - (3xy)^2 \quad \blacktriangleleft \quad (\quad)^2 - (\quad)^2 \text{の形になった} \\ &= \{(x^2 - y^2) + 3xy\}\{(x^2 - y^2) - 3xy\} \quad \blacktriangleleft \quad A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \text{の公式を使った} \\ &= (x^2 + 3xy - y^2)(x^2 - 3xy - y^2) \quad \blacktriangleleft \quad \text{整理して因数分解終了！} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} & 4x^4 + 11x^2y^2 + 9y^4 \\ &= (4x^4 + 9y^4) + 11x^2y^2 \\ &= \{(2x^2 + 3y^2)^2 - 12x^2y^2\} + 11x^2y^2 \\ &= (2x^2 + 3y^2)^2 - x^2y^2 \\ &= (2x^2 + 3y^2)^2 - (xy)^2 \quad \blacktriangleleft \quad (\quad)^2 - (\quad)^2 \text{の形になった} \\ &= \{(2x + 3y) + xy\}\{(2x + 3y) - xy\} \quad \blacktriangleleft \quad A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \text{の公式を使った} \\ &= (2x + xy + 3y)(2x - xy + 3y) \quad \blacktriangleleft \quad \text{整理して因数分解終了！} \end{aligned}$$

次に少し変わった問題を解いてもらいます。

問題 1

$x^2 - 60x + 779$ を因数分解せよ。

これは中学生の知識でも解けないことがないんだけど、因数分解するんだからたして-60、かけて779となるような2つの数字を選びだすんだよね。探したらできないことはないけど、ものすごく面倒臭そう…

そこでこういった因数分解でも()²-()²の因数分解でも解けるということを覚えておいてください。

【解答】

$$\begin{aligned}
 & x^2 - 60x + 779 \\
 &= (x - 30)^2 - 900 + 779 \\
 &= (x - 30)^2 - 121 \\
 &= (x - 30)^2 - 11^2 \leftarrow ()^2 - ()^2 \text{の形になった} \\
 &= \{(x - 30) + 11\}\{(x - 30) - 11\} \leftarrow A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \text{の公式を使った} \\
 &= (x - 19)(x - 41) \leftarrow \text{整理して因数分解終了!}
 \end{aligned}$$

上記のやり方だったら簡単に因数分解できるよね。頻度としてはそれほど高くないけど、たまにでてくるのでしっかりと覚えておいてください。それでは次の練習問題を解いてください。

練習問題 2

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 4x - 165$

(2) $x^2 - 80x + 1311$

【解答】

(1) $x^2 + 4x - 165$

$$\begin{aligned}
 &= (x + 2)^2 - 4 - 165 \\
 &= (x + 2)^2 - 169 \\
 &= (x + 2)^2 - 13^2 \\
 &= \{(x + 2) + 13\}\{(x + 2) - 13\} \\
 &= (x + 15)(x - 11)
 \end{aligned}$$

(2) $x^2 - 80x + 1311$

$$\begin{aligned}
 &= (x - 40)^2 - 1600 + 1311 \\
 &= (x - 40)^2 - 289 \\
 &= (x - 40)^2 - 17^2 \leftarrow \text{(注)} \\
 &= (x - 40 + 17)(x - 40 - 17) \\
 &= (x - 23)(x - 57)
 \end{aligned}$$

(注について) $289 = 17^2$ に気づかなかった人もいるかもしれないけど、ここは絶対に()²-()²の形になってくれます。だから279も何かの2乗になっている。そう考えれば気づけるよね

今回はこれで終了です。

因数分解を5回にわたって解説しましたが、今回は最終回です。因数分解に関してはこれくらいやっておけば大丈夫だと思います。因数分解は数学の基礎となるところです。解き方をしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

数学の偏差値を50から60にするサイト

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com