『対称式』練習問題解答

練習 1

$x=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}, y=2-\sqrt{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) x^2+y^2　　(2) $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

【解説】

対称式の問題で基本対称式の値 $x+y$ と xy が与えられていないので，まず基本対称式の値を求めてから解いていきます。x は $x=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ となっていますが，このままでは考えにくいのでとりあえず有理化してから解いていきます。

【解答】

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2-\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \quad \blacktriangleleft \text{ 分母の有理化をした} \\
&= \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} \\
&= 2+\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x+y &= 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3} \quad \blacktriangleleft\ x=2+\sqrt{3},\ y=2-\sqrt{3} \text{ をそれぞれ代入した} \\
&= 4 \quad \blacktriangleleft\ x+y \text{ の値が求まった}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
xy &= (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) \quad \blacktriangleleft\ x=2+\sqrt{3},\ y=2-\sqrt{3} \text{ をそれぞれ代入した} \\
&= 4-3 \\
&= 1 \quad \blacktriangleleft\ xy \text{ の値が求まった}
\end{aligned}
$$

(1)
$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy \quad \blacktriangleleft \text{ 対称式の公式より} \\
&= 4^2-2 \quad \blacktriangleleft\ x+y=4,\ xy=1 \text{ をそれぞれ代入} \\
&= 14
\end{aligned}
$$

(2) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy}$ ◀ 分数の対称式はとりあえず通分

$= \frac{x^2 + y^2}{xy}$

$= \frac{14}{1}$ ◀ (1) の $x^2 + y^2 = 14$ と $xy = 1$ をそれぞれ代入

$= 14$

練習 2

$ab = 1, \frac{a+b}{ab} = 3$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $a^3 + b^3$

(2) $\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b}$

【解説】

対称式の問題で、基本対称式の値が与えられていないときは何よりもまず基本対称式の値を求めてから問題に取り掛かります。今回の問題では ab の値は与えられているけど，$a+b$ の値は与えられていないからまず $a+b$ の値を求めてから問題を解いていきます。ab の値が分かっているので $a+b$ の値は $\frac{a+b}{ab} = 3$ の関係式から簡単に求めることができます。

【解答】

$\frac{a+b}{ab} = 3$

$a + b = 3ab$ ◀ 両辺に $a + b$ をかけた

$= 3$ ◀ $ab = 1$ より。基本対称式の値が求まった！

(1) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ ◀ 対称式の公式より

$= 3^3 - 3 \cdot 1 \cdot 3$ ◀ $a + b = 3$，$ab = 1$ をそれぞれ代入した

$= 27 - 9$

$= 18$

(2) $\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b} = \frac{a^3 + b^3}{ab}$ ◀ 分数の対称式はとりあえず通分

$= \frac{18}{1}$ ◀ (1) の $a^3 + b^3 = 18$ と $ab = 1$ をそれぞれ代入した

$= 18$

練習 3

$\sqrt{3}$ の整数部分を a、小数部分を b とする。このとき $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ の値を求めよ。

【解説】

$\sqrt{3} \neq 1.73$ なので $\sqrt{3}$ の整数部分は 1 です。(小数部分)=(実数)−(整数部分) なので $\sqrt{3}$ の小数部分 b は $b = \sqrt{3}-1$ です。

【解答】

$a,\ b$ は $\sqrt{3}$ の整数部分と少数部分なので $a = 1,\ b = \sqrt{3}-1$ となる。

$a+b = \sqrt{3}\ ab = \sqrt{3}-1$ ◀ 基本対称式の値が求まった

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}+\frac{b}{a} &= \frac{a^2+b^2}{ab} \\
&= \frac{(a+b)^2-2ab}{ab} \\
&= \frac{\sqrt{3}^2-2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} \quad \text{◀ } a+b=\sqrt{3},\ ab=\sqrt{3}-1 \text{ をそれぞれ代入した} \\
&= \frac{3-2\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-1} \\
&= \frac{5-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \\
&= \frac{5-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \quad \text{◀ 分母の有理化をした} \\
&= \frac{-1+3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

練習 4

$a^2+3b = b^2+3a = 8$ のとき，次の式の値を求めよ。ただし $a \fallingdotseq b$ とする。

(1) ab　　(2) $a+b$　　(3) a^2+b^2　　(4) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$

【解説】

$a^2+3b = b^2+3a = 8$ はふたつの式に分けると $a^2+3b = 8,\ b^2+3a = 8$ です。似ている式のときは，足したり引いたりしたらうまくいくんだったよね。今回もこの知識を使って解いていきます。

【解答】

$$\begin{cases} a^2+3b = 8 \cdots ① \\ b^2+3a = 8 \cdots ② \end{cases}$$ とする。

①－②より$a^2-b^2+3(b-a)=0$

$(a+b)(a-b)-3(a-b)=0$

$a \fallingdotseq b$ より両辺を $a-b$ で割ると

$(a+b)-3=0$

$a+b=3$

①＋②より$a^2+b^2+3(a+b)=16$

$(a+b)^2-2ab+3(a+b)=16$

ここで $a+b=3$ を代入して

$3^2-2ab+3\cdot 3=16$

$9-2ab+9=16$

$-2ab=-2$

$ab=1$

(1) $ab=1$

(2) $a+b=3$

(3) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=3^2-2$

$=7$

(4) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$

$=\dfrac{7}{1}$ ◀ (1) の結果の $a^2+b^2=7$ と $ab=1$ をそれぞれ代入

$=7$

練習 5

$x-y=3, xy=10$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) x^3-y^3　　(2) $x+y$　　(3) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

【解答】

(1)
$$
\begin{aligned}
x^3-y^3 &= x^3+(-y)^3\\
&= \{x+(-y)\}^3-3x(-y)\{x+(-y)\}\\
&= (x-y)^3+3xy(x-y)\\
&= 3^3+3\cdot 3\cdot 10\\
&= 27+90\\
&= 117
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
(x-y)^2 &= 9\\
(x+y)^2-4xy &= 9\\
(x+y)^2 &= 9+4xy\\
(x+y)^2 &= 9+4\cdot 10\\
(x+y)^2 &= 49\\
x+y &= \pm 7
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
\frac{x}{y}+\frac{y}{x} &= \frac{x^2+y^2}{xy}\\
&= \frac{(x+y)^2-2xy}{xy}\\
&= \frac{49-2\cdot 10}{10}\\
&= \frac{29}{10}
\end{aligned}
$$

◀ (1) より $(x+y)^2=49$ と $xy=10$ をそれぞれ代入

練習 6

$\sqrt{12-3\sqrt{12}}$ の小数部分を a とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $a+\dfrac{1}{a}$　　(2) $a^2+\dfrac{1}{a^2}$　　(3) $a-\dfrac{1}{a}$　　(4) $a^3-\dfrac{1}{a^3}$

【解答】

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{12-3\sqrt{12}}\\
&= \sqrt{12-2\sqrt{27}}\\
&= \sqrt{9}-\sqrt{3}\\
&= 3-\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

◀ 2 重根号を外すには，ルートのなかのルートの係数を 2 にしないといけない

$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73$ より $3 - \sqrt{3} \fallingdotseq 3 - 1.73 = 1.27$ よって $\sqrt{12 - 3\sqrt{12}}$ の整数部分は 1。少数部分 a は $a = 3 - \sqrt{3} - 1 = 2 - \sqrt{3}$ となる。

(1) $$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &= 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \\ &= 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ &= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} a^2 + \frac{1}{a^2} &= (a + \frac{1}{a})^2 - 2 \\ &= 4^2 - 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

(3) $(a-\frac{1}{a})^2=(a+\frac{1}{a})^2-4$

$=4^2-4$

$=12$

$a-\frac{1}{a}=\pm 2\sqrt{3}$

ここで $a=2-\sqrt{3}$ より $a<1$ なので $a<\frac{1}{a}$ が言える。

よって $a-\frac{1}{a}<0$

$\therefore\ a-\frac{1}{a}=-2\sqrt{3}$

⇑言われたらわかると思うけど $a-\frac{1}{a}<0$ ってことなかなか気づかないよね。前にも言ったけど(問題6の解説を見て下さい)答えが2つ以上になることは本当に少ない。だから今回みたいに答えが二つ以上出てきたときはどちらかの答えが不適になることが本当に多い。だから答えが二つ以上出てきたときは条件を満たしているかより丁寧に考えるようにして下さい

【(3)の別解】

これには、別解があります。と言いますか、別解の方が簡単に求められると思います。

$$a-\frac{1}{a}=(2-\sqrt{3})-\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$
$$=-2\sqrt{3}$$

(4) $a^3-\frac{1}{a^3}=(a-\frac{1}{a})^3+3(a-\frac{1}{a})$

$=(-2\sqrt{3})^3+3(-2\sqrt{3})$

$=-24\sqrt{3}-6\sqrt{3}$

$=-30\sqrt{3}$

練習7

$x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}, y=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) xy　(2) $x+y$　(3) x^2+y^2　(4) x^4+y^4

【解答】

(1) $xy = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$

$= (7+5\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}(7-5\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$

$= (49-50)^{\frac{1}{3}}$

$= (-1)^{\frac{1}{3}}$

$= -1$

⇑答えを見たらああこうやったら計算できるなとと思うかも知れないけど，こんな解法言われないとなかなか思いつかないよね。x と y の指数が今回は同じだったでしょ。そんなときは指数法則 $a^n b^n = (ab)^n$ を使うことが多い。このことを覚えておいて下さい。

(2) 【解説】

この問題も初見では難しいと思います。(1) は指数公式をつかって処理しました。一般に 3 乗根は考えにくいよね。そこで累乗根が出てきたときは両辺を何乗かすることによって累乗根を消して、普通の指数の形にしてから計算することが多いということを覚えておいてください。

今回は $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ の両辺を 3 乗すると $x^3 = 7+5\sqrt{2}$ となり累乗根が消えてくれるので計算しやすくなります。

累乗根では考えにくいので，両辺を何乗かして累乗根を消してから考えるということを頭に入れておいてください。

【解答】

$x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$

$x^3 = 7+5\sqrt{2} \cdots ①$

$y = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$

$x^3 = 7+5\sqrt{2} \cdots ②$

① + ② より

$x^3+y^3 = 7+5\sqrt{2}+7-5\sqrt{2}$

$x^3+y^3 = 14$

⇑ x^3+y^3 は対称式なので基本対称式 $x+y$, xy のみで表わすことができる。ここで xy の値はもう既に分かっているので x^3+y^3 は $x+y$ のみで表わされることになる。$x+y$ のみで表わされるので，その方程式を解くことにより $x+y$ の値が求められる！

$(x+y)^3 - 3xy(x+y) = 14$

$(x+y)^3 + 3(x+y) - 14 = 0$ ◀ $xy = -1$ を代入。$x+y$ のみの式になった

ここで $X = x+y$ とする。

$X^3 + 3X - 14 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & 3 & -14 \\ & & 2 & 4 & 14 \\ \hline & 1 & 2 & 7 & 0 \end{array}$$

$(X-2)(x^2+2X+7) = 0$

$X^2+2X+7 \fallingdotseq 0$ より ◀ (判別式)< 0 より

$X = 2 \quad \therefore x+y = 2$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=4-2\cdot(-1)$

$=6$

(4) $x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2$

$=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$

$=6^2-2\cdot(-1)^2$

$=34$

練習 8

2 次方程式 $x^2-4x+2=0$ の 2 つの解を α,β とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha+\beta$ (2) $\alpha\beta$ (3) $\alpha^2+\beta^2$ (4) $\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}$

【解答】

解と係数の関係より $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=2$

(1) $\alpha+\beta=4$

(2) $\alpha\beta=2$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=4^2-4$

$=12$

(4) $\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{4^3-3\cdot2\cdot4}{2}$

$=20$

練習 9

$x+y+z=3,\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $(x-3)(y-3)(z-3)$ (2) $x^3+y^3+z^3$

【解説】

対称式の問題で基本対称式の値が与えられていないので，まずは基本対称式の値を求めてから問題に進むっていうのが対称式の問題を解く上で正しい考え方なんだけど，今回の問題は与えられた条件式からすべての基本対称式の値を求めることはできません。

こういうふうに基本対称式の値が求められない問題もまれではありますがでてきます。こういった問題では必ず互いに打ち消しあってくれるので心配しなくていいです。とりあえず条件式から求められるところまで基本対称式の値を求めて，それ以上ムリとなったら問題に進んでください。

【解答】

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{3}$$

$$xyz=3(xy+yz+zx)$$

⇑基本対称式の値はこれ以上求められそうにないのでとりあえずここでストップ。この状態で問題に進みます

(1)　$(x-3)(y-3)(z-3)$

$=(xy-3x-3y+9)(z-3)$

$=xyz-3xy-3xz+9x-3yz+9y+9z-27$

$=xyz-3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)-27$ ◀ 基本対称式のみで表わせた

⇑対称式の問題はまずは基本対称式のみで表わすことが基本。$(x-3)(y-3)(z-3)$ を式変形して基本対称式のみで表わさないといけないんだけど，$(x-3)(y-3)(z-3)$ を式変形するなんて展開するくらいしかないよね。

(与式) $=xyz-3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)-27$

ここで $x+y+z=3$，$xyz=3(xy+yz+zx)$ を代入

$=3(xy+yz+zx)-3(xy+yz+zx)+9\cdot 3-27$

$=0$

(2)　$x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$ ◀ 暗記しておかないといけない式

$=(x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}+3xyz$

$=3\{3^2-3(xy+yz+zx)\}+3xyz$ ◀ $x+y+z=3$ を代入

$=27-9(xy+yz+zx)+3xyz$

$=27-9(xy+yz+zx)+9(xy+yz+zx)$ ◀ $xyz=3(xy+yz+zx)$ を代入

$=27$

練習 10

$x^3 - x^2 + 4x - 2 = 0$ の 3 解を α, β, γ とする。このとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$ (2) $\dfrac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha} + \dfrac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta} + \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma}$

【解答】解と係数の関係より

$\alpha + \beta + \gamma = 1,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 4,\ \alpha\beta\gamma = 2$

(1) $$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$$
$$= \frac{4}{2}$$
$$= 2$$

(2) $$\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha} + \frac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta} + \frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma}$$
$$= \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} + \frac{(1-\beta)^2}{\beta} + \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma}$$ ◀ $\alpha + \beta + \gamma =$(一定) のときの文字消去。本文 P27 参照
$$= \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha} + \frac{\beta^2 - 2\beta + 1}{\beta} + \frac{\gamma^2 - 2\gamma + 1}{\gamma}$$
$$= \alpha - 2 + \frac{1}{\alpha} + \beta - 2 + \frac{1}{\beta}\gamma - 2 + \frac{1}{\gamma}$$
$$= \alpha + \beta + \gamma + (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}) - 6$$
$$= 1 + 2 - 6$$ ◀ $\alpha + \beta + \gamma = 1$, (1) の $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} = 2$ をそれぞれ代入
$$= 1 + 2 - 6$$
$$= -3$$