$\boxed{1}$ (1) $y = x + \dfrac{1}{x}$ とおき、$x^3 + \dfrac{1}{x^3}$, $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ をそれぞれ y の多項式として表せ。

(2) $\alpha^6 + \alpha^5 - 9\alpha^4 - 10\alpha^3 - 9\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ をみたすすべての複素数 α を求めよ。

$\boxed{2}$ n を自然数とし $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を正の実数とする。このとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqq n^2$$

【解説】
今回の問題は「お茶の水女子大学の２００８年」の過去問です。

受験生なら $\boxed{1}$ (1) は単なる対称式の問題ですから、基本です。

$\boxed{1}$ (2) はノーヒントで出題されたら難しい (といっても受験生なら当たり前のように解けないといけない) かもしれませんが、(1) がヒントになっています。与式を $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ の式にして解いていく問題で相反方程式と呼ばれます。

$\boxed{2}$ は難しいです (お茶の水女子大学のレベルを考えると、受験問題としては標準的な問題です。受験直前の人なら解けてほしいですが、それ以外の人には難しいです)。帰納法を使って証明していくのですが、途中で相加相乗平均を使えることに気づけるかどうかがポイントです。

また、この問題はシュワルツの不等式という有名な式がありますが、その知識を使って解くと簡単に解くことができます。シュワルツの不等式に関しては受験ではそれほど多く出題されるわけでないのでわざわざ覚える必要もないですが、今回の問題のようにシュワルツの不等式を使うと普通に解くよりもはるかに短時間で解くことができます。余力のある人は、覚えておいてください。

それでは $\boxed{1}$ (1) に進みます。

【1. (1) の解説】
これは単なる対称式の問題です。対称式がよく分かっていないという人は以下のプリントで勉強して下さい。
対称式のプリント：http://www.hmg-gen.com/taisyousiki.pdf
対称式の解答：http://www.hmg-gen.com/k-taisyousiki.pdf

詳しくは、対称式のプリントを見てほしいのですが、対称式は $a^2 + b^2$ や $\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}$ のよう

に文字を入れ替えても元の式と同じになる式のことです。

そしてすべて対称式は基本対称式のみで表すことができます。基本対称式とは2文字の対称式の場合 $a+b,\ ab$ のことです。以下はよくでる対称式なので暗記してください。

覚えるべき対称式

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

上記の対称式は $(a+b)^2$ や $(a+b)^3$ を展開することによって導くことができます。a^4+b^4 や a^5+b^5 の式もたまに出てきます。この式も先ほどと同じように $(a+b)^4$ や $(a+b)^5$ と式変形するのかな？と考える人もいますが、それはしません。

$(a+b)^4$ や $(a+b)^5$ の公式は、先ほど話した $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ や $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ を利用して解いていきます。

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=x^3+\left(\dfrac{1}{x}\right)^3,\ x^4+\dfrac{1}{x^4}=x^4+\left(\dfrac{1}{x}\right)^4$ と式変形できますが、これは x と $\dfrac{1}{x}$ の対称式です。

x と $\dfrac{1}{x}$ の基本対称式は $x+\dfrac{1}{x}$ と $x\cdot\dfrac{1}{x}=1$ です。$x\cdot\dfrac{1}{x}=1$ と消えてくれるので、x と $\dfrac{1}{x}$ の対称式は $x+\dfrac{1}{x}$ のみで表すことができます。それでは (1) の解答に進みます。

【1. (1) の解説】

$x^3+\dfrac{1}{x^3}$

$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ ◀ 公式 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ に $a=x,\ b=\dfrac{1}{x}$ を代入した

$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ ◀ $x+\dfrac{1}{x}$ のみで表せた！

$=y^3-3y$

$\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ ◀ $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ をすると $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ が出てきてくれる

$=x^4+x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}$ ◀ ただ単に展開をしただけ

$=x^4+\dfrac{1}{x^4}+x^2+\dfrac{1}{x^2}$

$=x^4+\dfrac{1}{x^4}+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}$

⇑ 公式 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ に $a=x,\ b=\dfrac{1}{x}$ を代入した

ここで、$\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^4+\dfrac{1}{x^4}+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$ に $x^3+\dfrac{1}{x^3}=y^3-3y,\ x+\dfrac{1}{x}=y$ を代入すると

$(y^3-3y)y=x^4+\dfrac{1}{x^4}+y^2-2$

$x^4+\dfrac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2$ ◀ これが答え！

【1. (2) の解説】
$\alpha^6+\alpha^5-9\alpha^4-10\alpha^3-9\alpha^2+\alpha+1=0$ の式で一番左側の項と右側の項の係数はともに 1 です。次に、左から 2 番目の項と右から 2 番目の項の係数はともに 1 です。最後に右から 3 番目の項と左から 3 番目の項の係数はともに 9 となっています。

このように左右の係数が対称になっているものを相反方程式といいます。相反方程式の解法は両辺を x^n (n は適当な数字) でわります。今回の問題では α^3 で両辺をわります。相反方程式については、こちらのプリントでも解説していますので、もしよければ見てください。
相反方程式のプリント：http://www.hmg-gen.com/tecni1a-1.pdf

【1. (2) の解答】
$\alpha^6+\alpha^5-9\alpha^4-10\alpha^3-9\alpha^2+\alpha+1=0$ に $\alpha=0$ を代入すると、(左辺) $=1$, (右辺) $=0$ となり不成立。よって、$\alpha \neq 0$ となるので、両辺を α^3 で割ると

両辺を α^3 という変数で割りたい、ところが変数の値が 0 のときは割ることができない。このように変数で両辺を割るときは、その変数が 0 になるかどうか確認をすること

$\alpha^6+\alpha^5-9\alpha^4-10\alpha^3-9\alpha^2+\alpha+1=0$

$\alpha^3+\alpha^2-9\alpha-10-9\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha^3}=0$ ◀ 両辺を $\alpha^3(\neq 0)$ で割った！

$\left(\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}\right)+\left(\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)-9\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)-10=0$

ここで

$\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^3-3\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ ◀ (i) でしたのと同じ式変形

$\alpha^2+\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^2=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-2$ ◀ (i) でしたのと同じ式変形

上記をそれぞれ代入すると

$\left(\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}\right)+\left(\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)-9\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)-10=0$

$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^3-3\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)+\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-2-9\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)-10=0$

⇑ 与式が $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ のみの式になってくれた

ここで $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=t$ とする。

$t^3-3t+t^2-2-9t-10=0$

$t^3+t^2-12t-12=0$

$(t+1)(t^2-12)=0$ ◀ 組立除法より

$\therefore\ t=-1,\pm 2\sqrt{3}$

⇑ これで t の値が求まったので後は $t=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ から α の値を求めていくだけです

(i) $t=-1$ のとき

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=-1$ ◀ $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=t$ に $t=-1$ を代入した

$\alpha^2+1=-\alpha$ ◀ 両辺に α をかけた

$\alpha^2+\alpha+1=0$

$\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2}$ ◀ 解の公式より

$=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $t = 2\sqrt{3}$ のとき

$\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 2\sqrt{3}$ ◀ $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = t$ に $t = 2\sqrt{3}$ を代入した

$\alpha^2 + 1 = 2\sqrt{3}\alpha$ ◀ 両辺に α をかけた

$\alpha^2 - 2\sqrt{3}\alpha + 1 = 0$

$\alpha = -(-\sqrt{3}) \pm \sqrt{\sqrt{3}^2 - 1 \cdot 1}$ ◀ 解の公式より

$= \sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 1}$

$= \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

(iii) $t = -2\sqrt{3}$ のとき

$\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = -2\sqrt{3}$ ◀ $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = t$ に $t = -2\sqrt{3}$ を代入した

$\alpha^2 + 1 = -2\sqrt{3}\alpha$ ◀ 両辺に α をかけた

$\alpha^2 + 2\sqrt{3}\alpha + 1 = 0$

$\alpha = -\sqrt{3} \pm \sqrt{\sqrt{3}^2 - 1 \cdot 1}$ ◀ 解の公式より

$= -\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 1}$

$= -\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

以上より、$\alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2},\ \sqrt{3} \pm \sqrt{2},\ -\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$ ◀ これが答え

次に $\boxed{\textbf{2}}$ に進みます。

【2 の解説】

問題

n を自然数とし $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を正の実数とする。このとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqq n^2$$

どうやって示すのかな？と考えるんだけど、とりあえず自然数 n を含んでいるので、帰納法で証明をしていきます (自然数 n を含んだ証明のときは、帰納法を使って示すことが多いです)。

帰納法なので、$n = 1$ のとき成立。$n = k$ のとき成立すると仮定して、$n = k + 1$ のとき成

立すると示していきます。

$n=k$ のとき

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)\geqq k^2\cdots(*)$$

$(*)$ を使って $n=k+1$ のとき成立する式の

$(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)\geqq (k+1)^2$ を証明します。

上記の式が言えたら証明終了になるんだけど、次のように変形をしていきます。

(左辺)

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\left\{(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\right\}\left\{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+\frac{1}{a_{k+1}}\right\}$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)$$

$$+\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+1$$ ◀ 分配法則を使って展開をした

上記のようになぜ $(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)$ がひとかたまりになるように式変形をなぜするのか思いつかないという人も多いと思うけど、帰納法は $n=k$ のとき成り立つと仮定して $n=k+1$ のとき成立するということを示すんだよね。

これは、要するに $n=k$ のとき成り立つ式を使って、$n=k+1$ のときの式を証明していくっていうことです。

この問題では $n=k$ のときの式は $(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)$ なんだから、$n=k+1$ のときなんとかこの式を使うには上記のように式変形をしたらいいんじゃない？うまくいくかどうかはよくわかんないけど、式変形をしたらとりあえず $n=k$ のときの成立式を使える形になったよね？

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)$$

$$+\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+1$$

上記の式で $(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_k}\right)$ の部分は $n=k+1$ のときの条件式を使って考えられるとして、

残りの
$\dfrac{1}{a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_k}\right)+1$ の部分を考えていかないとダメだよね。そこでどうするのかな？と考えるんだけど。1は後で使うとして、残りの部分を展開をしてみます。

$$\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)$$
$$=\left(\frac{a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_2}{a_{k+1}}+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)+\left(\frac{a_{k+1}}{a_1}+\frac{a_{k+1}}{a_2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$$

また、ここから考えないといけないんだけど、大学受験生ならここからの式変形はすぐに思いついて欲しいですが、ここからは実は相加相乗平均がつかえます。

左のカッコの１番左の項と右のカッコの１番左の項を足し合わせてみます。

$$\frac{a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_1}\geqq 2\sqrt{\frac{\cancel{a_1}}{\cancel{a_{k+1}}}\cdot\frac{\cancel{a_{k+1}}}{\cancel{a_1}}}=2$$

次に２番目の項同士を足し合わせてみます。

$$\frac{a_2}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_2}\geqq 2\sqrt{\frac{\cancel{a_2}}{\cancel{a_{k+1}}}\cdot\frac{\cancel{a_{k+1}}}{\cancel{a_2}}}=2$$

こういうふうに左側のカッコの i 番目の項と右側の項の i 番目の項をペアにすると全て相加相乗平均を使うことができます。最初のうちはなかなか気づきにくいかもしれませんが、分数で足し算で表されていて互いに掛け合わせると変数が消えるときは相加相乗平均を使えるのでは？と考えるようにしてください。以上のことを踏まえて解答に進みます。

【2の解答】

(i) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=a_1\cdot\frac{1}{a_1}=1$$

$$(\text{右辺})=1$$

よって、成立。

(ii) $n=k$ のとき $(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)\geqq k^2\cdots(*)$ が成立すると仮定する。

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\left\{(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\right\}\left\{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+\frac{1}{a_{k+1}}\right\}$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)$$

$$+\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+1\cdots①$$

ここで

$$\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_2}{a_{k+1}}+\cdots+\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)+\left(\frac{a_{k+1}}{a_1}+\frac{a_{k+1}}{a_2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_2}\right)+\cdots\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$$

$$\geqq 2\sqrt{\frac{a_1}{a_{k+1}}\cdot\frac{a_{k+1}}{a_1}}+2\sqrt{\frac{a_2}{a_{k+1}}\cdot\frac{a_{k+1}}{a_2}}+\cdots+2\sqrt{\frac{a_k}{a_{k+1}}\cdot\frac{a_{k+1}}{a_k}}\ (\because a_i>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k+1))$$

$$=2k\cdots(**)$$

よって ① は

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)$$

$$+\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+1$$

$$\geqq k^2+2k+1\quad(\because\ (*)\,(**))$$

$$=(k+1)^2$$

よって、$n=k+1$ のときも成立する。

以上より、全ての自然数において与式は成立する。

これで終了ですが、この問題はシュワルツの不等式を使って示すこともできます。シュワルツの不等式を使うときは、シュワルツの不等式を証明してから問題を解いていくようにしてください。それでは、別解に進みます。

【2 の別解】

任意の実数 t に対して

$(x_1t-y_1)^2+(x_2t-y_2)^2+\cdots+(x_nt-y_n)^2 \geqq 0$ が成立する。

⇑ 2 乗したんだから全てが 0 以上。0 以上を足し合わせても 0 以上

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (x_1t-y_1)^2+(x_2t-y_2)^2+\cdots+(x_nt-y_n)^2\\ &= x_1^2t^2-2x_1y_1t+y_1^2+x_2^2t^2-2x_2y_2t+y_2^2+\cdots+x_n^2-2x_ny_n+y_n^2 \quad \blacktriangleleft \text{単に展開した}\\ &= (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\,t^2-2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)\,t+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2 \quad \blacktriangleleft t\,\text{で整理した}\end{aligned}$$

ここから少し考えるんだけど $(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\,t^2-2\,(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)\,t+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$ は下に凸な 2 次関数。これが任意の t で 0 以上でないとダメなんだから、判別式を D とすると、$D \leqq 0$ を満たせばよいことになります。

判別式を D とする。$D \leqq 0$ であればよいので

$$D/4=(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\,(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2) \leqq 0$$

$$\therefore\ (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\,(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2) \geqq (x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2 \quad \blacktriangleleft \text{シュワルツの不等式を示せた}$$

$a_1>0\,(i=1,2,\cdots,n)$ より、上記を $x_i=\sqrt{a_i},\ y_i=\dfrac{1}{\sqrt{a_i}}$ で置き換えると

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqq \left(\cancel{\sqrt{a_1}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{a_1}}}+\cancel{\sqrt{a_2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{a_1}}}+\cdots+\cancel{\sqrt{a_n}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{a_1}}}\right)^2$$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqq (1+1+\cdots+1)^2$$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqq n^2{}_{//}$$

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com