問題

平行四辺形 $ABCD$ において、対角線 BD の中点を E、辺 AD を $3:2$ に内分する点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\mathrm{b}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{\mathrm{d}}$ とするとき、次の問いに答えよ。

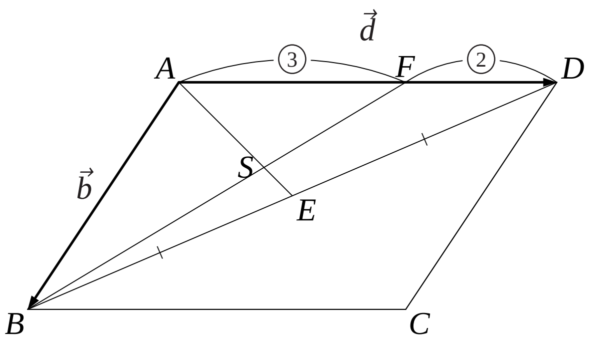
(1) $\triangle\mathrm{BCD}$ の重心を G とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{\mathrm{b}}$, $\vec{\mathrm{d}}$ で表せ。

(2) 直線 AE と直線 BF の交点を S とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ を $\vec{\mathrm{b}}$, $\vec{\mathrm{d}}$ で表せ。

(3) 線分 AC の長さが 36 のとき、線分 SG の長さを求めよ。

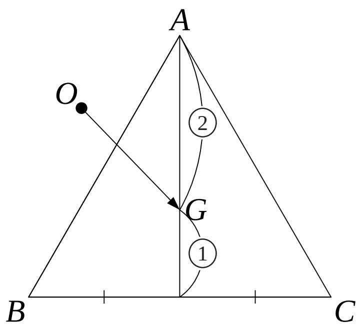
【解説】
この問題は新潟大学の理系学部の２００７年の過去問です。問題のレベルとしてはごくごく標準的な問題です。

レベルとしては、センター試験と同じかそれよりやや簡単な問題なので理系の人は満点をとって欲しいです。簡単ではありますが、１年生２年生の人にとってはまだまだ難しいという人も多いと思います。重心、１次独立、未知のベクトルの求め方などベクトルの重要な考え方が目白押しです。この問題を通してベクトルの復習をしておいてください。



【(1) の解説】
この問題は重心の公式を知っているかどうかという問題です。重心の公式については以下を覚えてください。

重心



上記のように △ABC の重心を G とする。O を任意点とするとき

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$

が成立する。

(注) 任意点 O について

任意点 O の意味が分からない人もいると思いますが、これは O がどこにあってもこの公式が成立するということ。例えば O が A のときは、上記の公式の O を A に置き換えたら成立するので、

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$$ ◀ O を A に置き換えた

$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$$ ◀ $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ より。これで $\overrightarrow{AG}$ が求まった！

上記の公式さえ知っていれば $\overrightarrow{AG}$ であろうが $\overrightarrow{BG}$ であろうが簡単に求めることができます。任意点の使い方を理解しておいてください。それでは、解答に進みます。

【(1) の解答】

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$$ ◀ 重心の公式より

$$=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{b}+\vec{d}+\vec{d})$$ ◀ $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}+\vec{d}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ をそれぞれ代入した

$$=\frac{2}{3}(\vec{b}+\vec{d})$$ ◀ これが答え

【(2) の解説】

この問題は未知のベクトル $\overrightarrow{AS}$ を求めよという問題です。未知のベクトルを求める時は

求めたいベクトルを２通りで表して、計数比較をして解いていくことが基本です。

計数比較をしたらいいのですが、ベクトルで計数比較をするには１次独立といった条件が必要です。

ベクトルの計数比較

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}$ で、

$\vec{a},\ \vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ ($\vec{a}$ と $\vec{b}$ が１次独立) であるとき

$\alpha=\alpha',\ \beta=\beta'$ がいえる。 ◀ 計数比較できるのは１次独立のときのみ

ベクトルで計数比較できるのは１次独立のときのみです。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が１次独立であるとは $\vec{a},\ \vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のことです。

１次独立は、教科書に載せていないところもありますがいちいち $\vec{a},\ \vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ とかくのが面倒なので１次独立と書いてもいいです。

現実的に、適当に何も考えずに解いてもほとんどの場合が１次独立になってくれています。$\vec{0}$ で考えることなんてないし、平行なベクトルも使うことはない。だけどベクトルで計数比較をするときは必ず１次独立という一言を添えないと大幅に減点されるので必ず解答にかくようにしてください。

では、問題に戻ります。先ほども話しましたが今回は $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ という未知のベクトルを求めるのですが、未知のベクトルを求めるには未知のベクトルを文字を使った式で２通りで表して、そのあとその２つの式を計数比較をして解いていくというのが基本的な解き方です。

S は AE 上という条件と BF 上と言う条件があるのでこの２つの条件を使って AS を文字を使って２通りで表してから解いていくことにします。

まず S は AE 上という条件を使って $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ を表します。

$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=k\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とする人が多いと思いますが、AE ベクトルの方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と等しいので、こちらを利用するほうが分数がでなくて楽になります。

$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=k\vec{\mathrm{b}}+k\vec{\mathrm{d}}$

これで $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ をまずひとつ文字を使って表せたので、次に別の方法で $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ を表してから解いていきます。

次に S は BF 上という条件を使って解いていきます。$BS : SF = t : 1 - t$ とおいて解いていくことにします。

もちろん $\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BS}}$ で解いていってもらってもかまいません。

これらを踏まえて解答に進みます。

【(2) の解答】
S は直線 AE 上にあるので、$\overrightarrow{\mathrm{AE}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を考え $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = k\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{b}} + k\overrightarrow{\mathrm{d}} \cdots$ ① となる。

$BS : SF = t : 1 - t$ とする。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AS}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AF}} \\ &= (1-t)\vec{b} + t\frac{3}{5}\vec{d}\end{aligned}$$

◀ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{b}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{d}}$ をそれぞれ代入した

$$= (1-t)\vec{b} + \frac{3}{5}t\vec{d} \cdots ②$$

$\vec{b}, \vec{d} \fallingdotseq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \not\parallel \vec{d}$ より ◀ 1 次独立より計数比較できる

$k = 1 - t,\ k = \dfrac{3}{5}t$ となる。

よって $k = \dfrac{3}{8},\ t = \dfrac{5}{8}$ となり $k = \dfrac{3}{8}$ を ① に代入すると

$\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \dfrac{3}{8}\vec{b} + \dfrac{3}{8}\vec{d}$ ◀ これが答え

【(3) の解説】
これはごくごく簡単な問題です。

$\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AS}$ ◀ 始点を A にした

$= \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d} - \frac{3}{8}\vec{b} - \frac{3}{8}\vec{d}$ ◀ $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}$, $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{8}\vec{b} + \frac{3}{8}$ をそれぞれ代入した

$= \frac{7}{24}\vec{b} + \frac{7}{24}\vec{d}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{d}$ の大きさが 36 で、$\overrightarrow{SG} = \frac{7}{24}(\vec{b} + \vec{d}) = \frac{7}{24}\overrightarrow{AC}$ より、$\overrightarrow{AS}$ の大きさは $\overrightarrow{AC}$ の $\frac{7}{24}$ の大きさになります。

【(3) の解答】

$\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AS}$ ◀ 始点を A にした

$= \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d} - \frac{3}{8}\vec{b} - \frac{3}{8}\vec{d}$ ◀ $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}$, $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{8}\vec{b} + \frac{3}{8}$ をそれぞれ代入した

$= \frac{7}{24}\vec{b} + \frac{7}{24}\vec{d}$

$\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{d}$ の大きさが 36 で、$\overrightarrow{SG} = \frac{7}{24}(\vec{b} + \vec{d}) = \frac{7}{24}\overrightarrow{AC}$ より、$\overrightarrow{AS}$ の大きさは $\overrightarrow{AC}$ の $\frac{7}{24}$ の大きさになる。

よって $\left|\overrightarrow{AS}\right| = 36 \times \frac{7}{24} = \frac{21}{2}$ ◀ これが答え

今回の問題はどうでしたか？この問題は基本的ではありますが、知らなくて解けなかったという人もいると思います。

今回の解説で分からない、疑問に思う点があった場合下記のアドレスにメールして下さい。それではがんばってください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com