問題

α, β を $0 < \alpha < \beta < 2$ を満たす実数とし、$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を $f(x) = |(x-\alpha)(x-\beta)|$ とする。

(1) $f(x)$ の最大値を M とする。$f(x) = M$ となる x がちょうど３つあるとき、実数 α, β と M の値を求めよ。

(2) (1) で求めた α, β について、$f(x) - mx = 0$ が異なる３つの解をもつような実数 m の値の範囲を求めよ。

【解説】
北大の２００８年の理系学部の過去問です。

式で考えるのではなく、図形の意味を考えて解く問題です。入試問題としては、簡単な問題ですが慣れていない人にとっては難しかったかもしれません。しっかりと理解しておいてください。

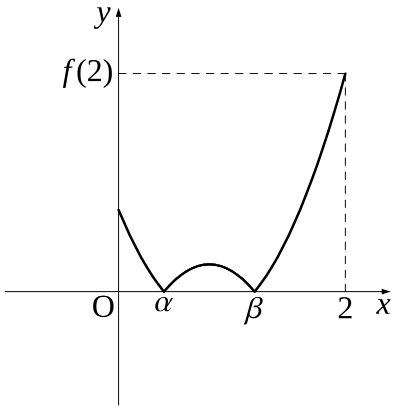
---

(１)
この問題を見て、まず思い出してほしいことは**関数の最大値、最小値問題はグラフをかいて考える**ということです。

最大値、最小値はグラフをかくとグラフからすぐに最大値、最小値を求めることができるので、最大値、最小値の問題はまずグラフをかいて考えるようにしてください。

この考えに従って $f(x) = |(x-\alpha)(x-\beta)|$ のグラフをかいていったらいいんだけど、このグラフはかくことができるよね？

絶対値のグラフはまずはグラフをかいて、x 軸より下側にくる部分を折り返せばいいだけです。

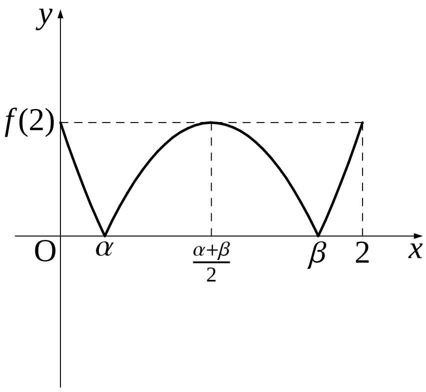


少し適当にグラフをかいてみたけど、上図のようになるときは $x = 2$ のときに最大値をとるよね？

問題では、$0 \leqq x \leqq 2$ における最大値がちょうど 3 つ存在するって言っているけど、これはどういったときか分かるかな？

グラフをみてもらえば分かると思うけど、最大となる可能性のあるのは $x = 0$ のときか、放物線の頂点のとき（$x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ のとき）か、$x = 2$ のときのどれかだよね？それ以外は、どういうふうに α, β を変えても最大値をとることはありません。

ということは、最大値が 3 つ存在するのは、この 3 つの値が等しくなるときしかないよね。図示すると次のような場合です。



上図のようなときにどうなるか分かるかな？まず、$x = 0,\ \dfrac{\alpha+\beta}{2},\ x = 2$ のときの値が等しいんだから $f(0) = f(\dfrac{\alpha+\beta}{2}) = f(2)$ ってなるよね？

さらに 2 次関数の対称性 (2 次関数は軸について対称) から $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ は 0 と 2 の中点つまり

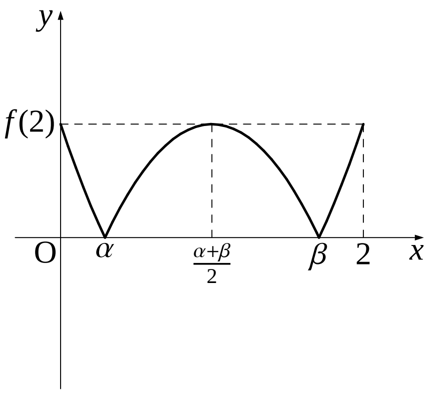
1と等しくなるので $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$ となります。

$f(0)=f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})=f(2)$ なんだけど、$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ は0と2の中点にあるという条件を満たしているとき必ず $f(0)=f(2)$ となります。

$f(0)$ か $f(2)$ どちらか一方の条件を使ったらいいんだけど、$f(2)$ より $f(0)$ の方が計算しやすそうなので $f(0)$ という条件を使います。

これらの条件から、$\alpha,\ \beta,\ M$ の値を求めていきます。それでは、解答に進みます。

【(1) の解答】
$f(x)=M$ となる x がちょうど3つあるとき、下図のようなときとなる。



このとき、$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1,\ f(0)=f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})$ を満たす。

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=1$$
$$\alpha+\beta=2\cdots①$$

$$\begin{aligned}f(0)&=|(0-\alpha)(0-\beta)|\\&=|-\alpha\beta|\\&=\alpha\beta\cdots②\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) &= \left|\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)\right| \\
&= \left|\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\right| \\
&= \left|-\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\right| \\
&= \frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\cdots③
\end{aligned}
$$

②, ③ より

$\alpha\beta = \dfrac{(\alpha-\beta)^2}{4}$

$4\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2$

$4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

$6\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$

$6\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$ ◀ 対称式の式変形 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ より

$8\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2$

$8\alpha\beta = 2^2$ ◀ ① の $\alpha+\beta=2$ を代入した

$\alpha+\beta = \dfrac{1}{2}\cdots④$

①, ④ より、$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\dfrac{1}{2}$ となる。

α, β を 2 解とする 2 次方程式は $X^2-2X+\dfrac{1}{2}=0$

$\alpha+\beta, \alpha\beta$ の値が分かっているときは、こういうふうにして α と β を求めます。

なぜ成立するかよく分からない人は $X^2-2X+\dfrac{1}{2}=0$ の 2 解を α, β として解と係数の関係で確認して下さい。確かに $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\dfrac{1}{2}$ となっていることが確認できます。

$X^2-2X+\dfrac{1}{2}$ を解くと、$X=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ となる。

$\alpha<\beta$ を考え、$\alpha=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ \beta=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ となる。

また、$M=f(0)=\alpha\beta$ より $M=\dfrac{1}{2}$ となる。

(2)

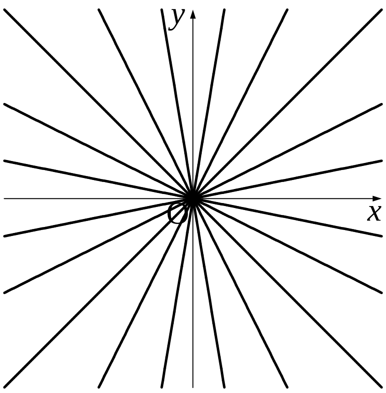
この問題は、$f(x)-mx=0$ をみたら $m=\dfrac{f(x)}{x}$ と定数分離をするのかな？と考えるけど、これでは分数関数になって考えにくい … 分数関数は数学 III で勉強する内容です。

もちろん理系の問題なので、分数関数を使って解いていってもいいんだけど、一般的に分数関数は微分が面倒なのであまり使いたくない、しかも今回の問題は絶対値を含んでいるので、場合分けが必要 … 面倒だよね？

この問題とは関係ないけど、数学って**単に面倒なだけの問題が大学受験に出題されるってこと本当に少ないんです。だから、この解法だったら解けることは解けるけどあまりに面倒だなぁ、と感じるときは別のもっと簡単な解法がある**と感ずけるようにしておいてください。少し適当な表現ですけど、重要なので覚えておいてください。

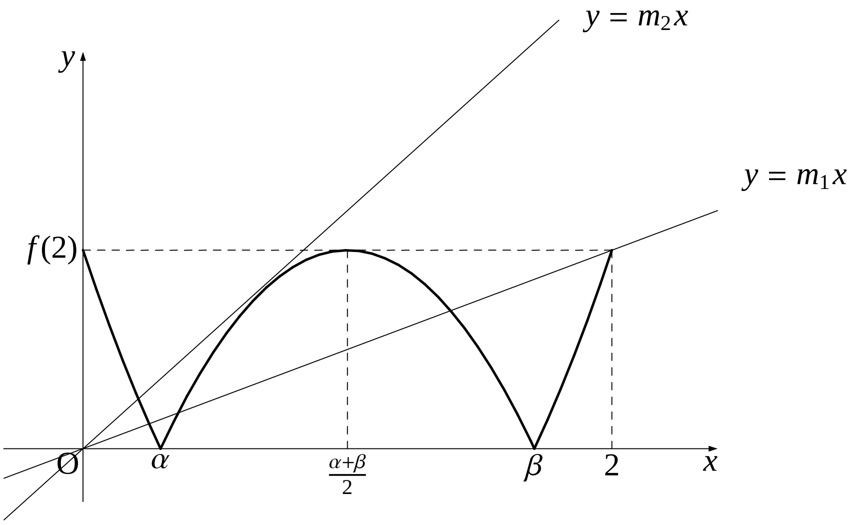
定数分離は、面倒なのでどうやって考えようかな？と思うんだけど $f(x)-mx=0$ を $f(x)=mx$ と式変形すると $f(x)-mx=0$ の解の個数って、要するに $y=f(x)$ と $y=mx$ のグラフの交点だよね？

$y=mx$ は分かるとは思うけど、原点を通り傾きが m の直線だよね。このことを使って解いていきます。



⇑少し見にくい図になっちゃったけど、これは $y=mx$ のグラフを m の値をいろいろ変化させたときの図です。$y=mx$ は原点を通る直線なんだから上記のようになるよね。

同じように $y=mx$ を変化させてみるんだけど、$y=f(x)$ と $y=mx$ が 3 つの交点をもつのは下図のようなときじゃない？

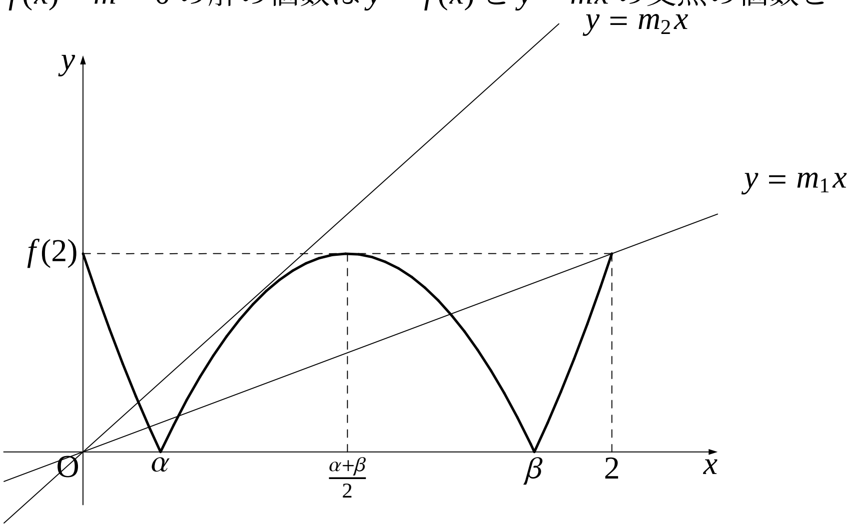


上図の $y = m_1x$ より傾き m が小さければ交点は４つになってしまいます。さらに小さくして m の値が負になれば交点はなくなります。

傾きが m_1 と m_2 の間にあるときは交点を３つ持ってくれます。傾きが m_2 より大きくすると交点は１個となってしまいます。

こういうふうに視覚的にとらえる問題も大学受験では出題されるのでしっかりと理解しておいてください。それでは、解答に進みます。

【(2) の解答】
$f(x) - m = 0$ の解の個数は $y = f(x)$ と $y = mx$ の交点の個数と一致する。



上図のようになるので、$y = f(x)$ と $y = mx$ が３つの交点を持つのは $m_1 < m < m_2$ を満たすとき。ただし、m_1 は $y = mx$ が $(2,\ f(2))$ を通るときで、m_2 は $y = f(x)$ と $y = mx$ が接するとき。

(1) より、$f(2)=\frac{1}{2}$ を考え $m_1=\frac{1}{4}$

また、$y=m_2x$ は $y=|(x-\alpha)(x-\beta)|$ $\alpha<x<\frac{\alpha+\beta}{2}$ で接するので

$|(x-\alpha)(x-\beta)|=m_2x$

$-(x-\alpha)(x-\beta)=m_2x$ ◀ $\alpha<x<\frac{\alpha+\beta}{2}$ のとき、$f(x)=-(x-\alpha)(x-\beta)$ より

$-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta=m_2x$

$x^2+\{m_2-(\alpha+\beta)\}x+\alpha\beta=0$

$x^2+(m_2-2)x+\frac{1}{2}=0$ ◀ $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$ をそれぞれ代入した

$x^2+(m-2)x+\frac{1}{2}=0$ の判別式を D とする。

$$D=(m-2)-2-4\cdot\frac{1}{2}=0$$
$$(m-2)^2=2$$
$$m-2=\pm\sqrt{2}$$
$$m=2\pm\sqrt{2}$$

$m=2+\sqrt{2}$ は不適、よって $m=2-\sqrt{2}$ となる。 ◀ $m=2+\sqrt{2}$ は $0<x<\alpha$ で接します。

以上より、求める範囲は $\frac{1}{4}<m<2-\sqrt{2}$ ◀ これが答え

今回の添削問題はどうだったでしょうか？それほど難しい問題ではないですが、解き方を知らない人にとっては難しかったと思います。こういうふうな解き方もあるのだなぁと覚えておいてください。河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com