問題

Oを原点とする。放物線$y = x^2$上に2点$P(p,\ p^2)$, $Q(q,\ q^2)$がある。ただし、$p < 0 < q$とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2$が成り立つとき、次の問いに答えよ。

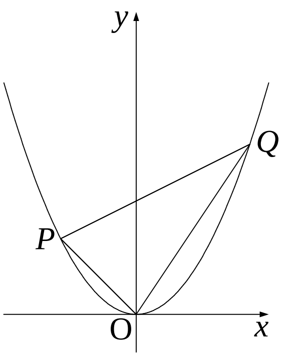
(1) pとqの積pqの値を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{OPQ}$の面積の最小値、および最小値をとるときのp, qの値を求めよ。

2008年の和歌山大学の文系の過去問です。問題のレベルとしては、ごくごく標準的な問題でベクトルの勉強さえ習っていたら、どんな人でも解けるレベルの問題です。

といっても、そこまで簡単な問題ではありません。学校のベクトルの勉強が終わった人には、ぜひともチャレンジしてもらいたい問題です。それでは、解説に進みます。

【解説】
一応、図を書いておきますね。



(1)は単に$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2$という条件に$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (p,\ p^2)$と$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (q,\ q^2)$をあてはめるだけです。成分が与えられた内積の公式は次の通りです。知っている人も多いと思いますけど、もう一度かいておきます。

内積の計算 (成分)

$\vec{a} = (x_1,\ y_1)$, $\vec{b} = (x_2,\ y_2)$のとき
$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$となる。

では、まず(1)の解答に進みます。

【(1)の解答】
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (p,\ p^2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (q,\ q^2)$となる。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = pq + p^2q^2$ となる。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= 2 \\ pq + p^2q^2 &= 2 \\ pq + (pq)^2 &= 2 \\ (pq)^2 + pq - 2 &= 0 \\ (pq-1)(pq+2) &= 0 \\ pq &= 1,\ -2 \end{aligned}$$

ここで、問題の条件より $p < 0,\ q > 0$ より、$pq < 0$ となるので、$pq = -2$ となる。

【(2) の解説】
まず、三角形の面積の求め方です。三角形の面積の求め方はいろいろとありますが、今回のように座標が与えられているときの面積は次の公式を使って求めます。

座標が与えられているときの三角形の面積の求め方

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (a,\ b),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (c,\ d)$ のとき、$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は

$S = \dfrac{1}{2}|ad - bc|$ となる。

この公式は、ベクトルの三角形の面積の公式 $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ から導くことができますが、$S = \dfrac{1}{2}|ad - bc|$ はよく出てくるし導くのは少し面倒なので公式自体を暗記するようにしておいた方がいいです。

それでは、これを使って解答に進みます。まだ、説明しないといけないこともありますが、それは解答の中で順を追って説明しながら解いていくことにします。

【(2) の解答】
$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とすると、$S = \dfrac{1}{2}|pq^2 - p^2q|$ ◀ 三角形の面積の公式を適用 となる。

数学は文字の数を減らせるときは、文字消去して文字の数を減らしてから考えていきます。

今回は、(1) より $pq = -2$ という条件があるので、この条件を使って p か q を消去して考えていきます。

どちらの文字を消去してもいいんですが、$p < 0$ と $q > 0$ のふたつを見比べてみれば、$p < 0$ は負、$q > 0$ は正。負より正の条件の方が扱いやすいので、条件の扱いにくい p を消去して、q のみの式にしてから解いていきます。

今回の問題は簡単なので、このくらいならどちらを消去しても、計算量は大して変わってきませんが、より難しい問題になると計算量が大きく変わってくる問題も多いです。ですから、文字消去するときは面倒な方、考えにくそうな方を消去する、ということを頭にいれておいてください。

$$S = \frac{1}{2}|pq^2 - p^2q|$$

$$= \frac{1}{2}\left| -\frac{2}{q}\cdot q^2 - (-\frac{2}{q})^2\cdot q\right| \quad ◀ p = -\frac{2}{q} \text{ を代入して、} p \text{ を消去した}$$

$$= \frac{1}{2}\left| -2q - \frac{4}{q}\right|$$

$$= \left|q + \frac{2}{q}\right|$$

$$= q + \frac{2}{q} \quad ◀ q > 0 \text{ より、} \frac{2}{q} \text{ も正、当然 } q + \frac{2}{q} > 0$$

ここからは、もうすぐに解けるようにしておいてほしいですが、最大値、最小値問題の解法の基本はグラフをかくことです。

$q + \frac{2}{q}$ のグラフをかけたらいいんだけど、分数を含んでいる関数なので数学 II B までの範囲ではグラフをかくことはできない

だから、数学 II B までの範囲で最大値、最小値問題が出てきたら、グラフをかくという以外の解法があるはずです。

で、その場合のほとんどが相加相乗平均を使って解きます。もちろん、相加相乗平均以外の解法で解くこともあります。でも、相加相乗平均で解くことが圧倒的に多いです。分数関数の最大値、最小値問題は何よりもまず、相加相乗平均で問題を解くことができないか考えるようにしてください。

相加相乗平均を使った、最大値最小値問題の解き方を知らないという人は、以下のページも参考にしてください。

相加相乗平均を使った最大最小問題の基本 http://www.hmg-gen.com/kaitou2-3.pdf
相加相乗平均を使った最大最小問題の実践編 http://www.hmg-gen.com/tecni2b-3.pdf

$$S = q + \frac{2}{q} \geqq 2\sqrt{q\frac{2}{q}} \quad (\because\ q > 0 \text{より、相加相乗平均})$$
$$= 2\sqrt{2}$$

等号は $q = \dfrac{2}{q}$ つまり $q = \sqrt{2}$ のときに成立するので、S の最小値は $2\sqrt{2}$ となる。

$pq = -2$ より、$p = -\sqrt{2}$ となる。

以上より、$p = -\sqrt{2},\ q = \sqrt{2}$ のとき、S は最小値 $2\sqrt{2}$ をとる。

これで、今回のプリントは終わりです。受験問題としては簡単ですが、まだ難しい問題に慣れていない人にとっては難しかったと思います。最後に相加相乗平均を使って最小値を求めましたが、大学受験では、本当に相加相乗平均を使って最大値や最小値を求めることとって多いんです。はじめて見たという人もいるかもしれませんが、重要です。しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com