問題

関数 $y = x^2$ のグラフ C と、定点 $A(0, a)\ (a > 0)$ を通り傾き t の直線 l との交点を P, Q とする。さらに、点 P における C の接線と点 Q における C の接線の交点を R とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標を a と t を用いて表せ。

(2) 三角形 PQR の面積 S を a と t を用いて表せ。

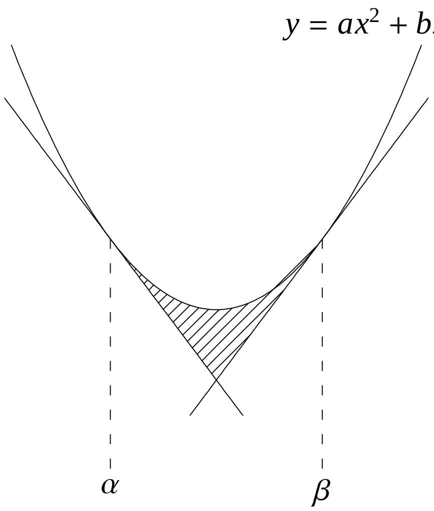
(3) 三角形 PQR の重心を G とする。直線 l の傾き t が実数全体を動くとき、点 G の軌跡を求めよ。

2008 年の新潟大学の過去問です。2 次関数と 2 接線によって囲まれた部分の面積を求める本当に典型的な問題です。

典型的な問題ではありますが、知らない人も多いと思います。決して難しくはない内容です。過去に本当にいろいろな大学で出題された内容ですので、この問題を通して理解しておいてください。

この問題に入る前に次の事柄を覚えておいてください。

2 次関数と 2 接線によって囲まれる部分の性質



上図のように、放物線と 2 接線によって囲まれる部分の面積 S は、$S = \dfrac{a}{12}(\beta - \alpha)^3$ となる。ただし、$a > 0$ のとき。

ちなみに $a < 0$ のときは、$S = \dfrac{-a}{12}(\beta - \alpha)^3$ となります。

問題として出題される２次関数は $y = x^2$ となることが多いです。このとき、２接線の交点の座標は $(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta)$ となります。これは、計算で求めることができますが、よく出る性質なので暗記しておいた方がいいと思います。ちなみに $y = ax^2$ のときは、交点は $(\frac{\alpha+\beta}{2}, a\alpha\beta)$ となります。

これらのことについていは以下のページでより詳しく説明しているので、興味のある人はこちらのページを見てください。
http://www.hmg-gen.com/tecni2b-5.pdf

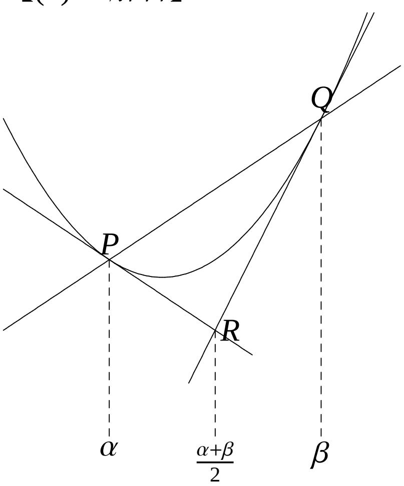
では、これらのことを踏まえて解答に進みます。

【(1) の解説】
P の x 座標を α とし、Q の x 座標を β とします。先ほどいったように、接線の座標は $(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta)$ となります。

$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ は解と係数の関係で求めることができるので、この問題は先ほどの性質さえ理解していればごくごく簡単に求めることができます。

ただ、先ほどの性質は公式としては使えないので解答では以下のように書くようにしてください。

【(1) の解答】



直線 l は定点 $(0, a)$ を通り傾き t の直線なので $l : y = tx + a$ となる。

上図のように P の x 座標を α、Q の x 座標を β とする。

P における $y = x^2$ の接線は、

$y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha)$

$y = 2\alpha x - \alpha^2 \cdots$①

同様に、Q における接線は $y = 2\beta x - \beta^2 \cdots$②⇐わざわざ計算をする必要はないよ。点 P の接線の α のところに β を代入すると、点 Q における接線となります。となる。

①, ② を連立すると $(x, y) = (\dfrac{\alpha + \beta}{2}, \alpha\beta)$ となる。
⇑実際に ①, ② を連立して計算したらこのようになります。ただ、先ほども言いましたがこれは覚えておいてください。答えの書き方としては上記のように書いてもらえばいいと思います。

ここで、α と β は $x^2 = tx + a$ つまり $x^2 - tx - a = 0$ の解なので、解と係数の関係より、$\alpha + \beta = t, \alpha\beta = -a$ となる。

以上より、点 R の座標は $(x, y) = (\dfrac{t}{2}, -a)$ となる。

【(2) の解説】
三角形 PQR の面積を求めよといった問題です。座標が与えられているときの三角形の面積は $S = \dfrac{1}{2}|ad - bc|$ を使って求めるのが基本です。今回の問題もこれで解いていきます。

また今回の問題は α, β のまま計算をしていき、最後に $\alpha + \beta = t, \alpha\beta = -a$ を代入して与式を a, t のみで表します。

途中で、$(\beta - \alpha)^3$ の計算をする必要があります。何も考えていない人は展開なんかをしてわけのわからない式になってしまいますが、これは重要な式変形ですので覚えておいてください。

重要な式変形

$$(\beta-\alpha)^3$$

$$=\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$ ◀ 指数公式 $(a^m)^n = a^{mn}$ より、$a^3 = (a^2)^{\frac{3}{2}}$

$$=(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}$$ ◀ $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ のみで表せた

上記の式変形のポイントは３乗だと対称式になってくれないから、強引に２乗の形にするということですが、こんなの知らなかったら普通気づかないよね？よく出る式変形なので覚えておいてください。それでは、解答に進みます。

【(2) の解答】

$P(\alpha,\ \alpha^2),\ Q(\beta,\ \beta^2),\ R(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\alpha,\ \alpha^2),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (\beta,\ \beta^2),\ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = (\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= (\beta,\ \beta^2) - (\alpha,\ \alpha^2)\\ &= (\beta-\alpha,\ \beta^2-\alpha^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= (\frac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta) - (\alpha,\ \alpha^2)\\ &= (\frac{\beta-\alpha}{2},\ \alpha\beta-\alpha^2)\end{aligned}$$

よって、三角形 PQR の面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left|(\beta-\alpha)(\alpha\beta-\alpha^2)-(\beta^2-\alpha^2)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right| \quad \blacktriangleleft \text{三角形の面積の公式 } S=\frac{1}{2}|ad-bc| \text{ より} \\
&= \frac{1}{2}\left|\alpha(\beta-\alpha)^2-(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\alpha(\beta-\alpha)^2-(\beta-\alpha)^2\cdot\frac{\beta+\alpha}{2}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(\beta-\alpha)^2\left(\alpha-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(\beta-\alpha)^2\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\right| \\
&= \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2\cdot\frac{\beta-\alpha}{2} \quad \blacktriangleleft |(\beta-\alpha)^2|=(\beta-\alpha)^2,\ \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|=\frac{\beta-\alpha}{2} \text{ より} \\
&= \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3 \\
&= \frac{1}{4}\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{4}(t^2+4a)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

少し計算がながくなりましたが、これは http://www.hmg-gen.com/tecni2b-5.pdf このページで説明している内容を知っていればごくごく簡単に求めることができます。

三角形 PQR の面積とは、直線と放物線によって囲まれた部分の面積 $\left(=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right)$ と 2 接線によって囲まれた部分の面積 $\left(=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3\right)$ の和なので、$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3$ となります。次に (3) に進みます。

【(3) の解説】

普通、大学受験の問題では (1), (2), (3) となっていると、(3) は (1) や (2) に関係するものが多いですが、今回の問題は関係ありません。まれにこういった出題もされるので注意しておくようにしてください。

この問題はごくごく基本的な問題なので解けないといけません。重心の性質として次のことを覚えておいてください。

重心

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ のとき、
三角形 ABC の重心は $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ となる。

【(3) の解答】

$P(\alpha,\ \alpha^2),\ Q(\beta,\ \beta^2),\ R(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta)$

G の座標を $(X,\ Y)$ とする。

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{2}}{3} \\
&= \frac{2\alpha+2\beta+\alpha+\beta}{6} \\
&= \frac{3\alpha+3\beta}{6} \\
&= \frac{\alpha+\beta}{2} \\
&= \frac{\frac{t}{2}}{2} \\
&= \frac{t}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta}{3} \\
&= \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha\beta}{3} \\
&= \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2+a}{3} \\
&= \frac{\frac{t^2}{4}+a}{3} \\
&= \frac{t^2+4a}{12}
\end{aligned}
$$

$X = \dfrac{t}{4}$ より、$t = 4X$ となる。これを $Y = \dfrac{t^2+4a}{12}$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{(4X)^2+4a}{12} \\
&= \frac{16X^2+4a}{12} \\
&= \frac{4}{3}X^2+\frac{a}{3}
\end{aligned}
$$

よって、求める軌跡は $y = \dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{a}{3}$ となる。

これで、今回の解説は終わりです。冒頭にも言いましたが、放物線と２接線に関する問題は本当に頻出です。知っていたらこれほど簡単な問題はありません。しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com