問題

以下の問いに答えよ

(1) $\alpha < \beta$ を満たす実数 α, β に対して

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を示せ。

(2) 放物線 P を $y = -x^2 + 2x + 4$ で定める。点 (p, q) が直線 $y = -2x + 1$ の上を動くとき、$y = (x-p)^2 + q$ で定める放物線 Q が P と共有点をもつような p の範囲を定めよ。

(3) p が (2) で求めた範囲を動くとき、P と Q で囲まれた図形の面積の最大値を求めよ。

2007 年のお茶の水大学の過去問です。文系、理系の共通問題です。理系の人は、数学 II の微積分を適当にしか勉強していない人が結構いますが、理系でも数学 II の微積分は頻出です。また、数学 III の微積分は、考える力さえあればその場で考えるということも可能ですが、数学 II の微積分は知っているか知らないかということが大きいです。ですから、勉強しないでその場で考えようと思っていても、少し無理があります。

といっても、それほど覚えないといけないパターンがあるわけではないので、心配しなくていいです。この問題も、本当に典型問題です。お茶の水大学の過去問ですが、このレベルの大学を受けるのなら、絶対に落としてはいけない問題です。

【(1) の解説】

この問題は、有名な公式を導きなさいよといった問題です。数学 III を勉強していたら、ある程度簡単に導けますが、文系の人にも出題されているので、少し面倒ですが普通に解いていきます。

【(1) の解答】

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\
&= \int_\alpha^\beta \left\{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\right\} dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{3}\beta^3 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\beta^2 + \alpha\beta^2 - \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\alpha^2 - \alpha^2\beta
\end{aligned}$$

ここからの式変形はすぐに気づかないといけない。共通因数を見つける場合、係数が同

じ者同士をペアにするとうまくいくことが多いです。展開なんかしたらダメですよ。

$$=\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$$ ◀ 係数が同じ者同士をペアにした

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\left\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\right\}$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(2\beta^2+2\alpha\beta+2\alpha^2-3\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2+6\alpha\beta)$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2)$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2-2\beta\alpha+\alpha^2)$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=(\text{右辺})_{//}$$

【(1) の別解の解説】
上記のようにしたら解けるけど、かなり面倒だよね。数学 III を勉強している人は次のようにするほうが早いです。というか、これくらいの計算なら文系の人も知っておいて欲しい内容です。

どういうふうにするかと言うと $(x-\alpha)$ の形を強引に作り出し、これをくずさずに式変形をしていきます。別に $(x-\beta)$ の形でもいいですよ。それでは、解答に進みます。

【(1) の別解の解答】

$$(\text{左辺})=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\left\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\right\}dx$$ ◀ 強引に $x-\alpha$ のみの形に変形をした

$$=\int_\alpha^\beta \left\{(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\frac{\alpha-\beta}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$

⇑ 上記のように式変形をすると $x=\alpha$ を代入したものはすべて 0 となり考えやすい

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3+\frac{\alpha-\beta}{2}(\beta-\alpha)^2$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=(\text{右辺})_{//}$$

【(2) の解説】
この問題は、単なる判別式を使うだけの問題なので解けないといけません。

【(2) の解答】
Q の頂点 $(p,\ q)$ が $y=-2x+1$ 上にあるので $q=-2p+1$ となる。

$P: y=-x^2+2x+4$ と $Q: y=(x-p)^2-2p+1$ が共有点をもつとき、
$-x^2+2x+4=(x-p)^2-2p+1$ が共有点をもつ

$$-x^2+2x+4=(x-p)^2-2p+1$$
$$-x^2+2x+4=x^2-2px+p^2-2p+1$$
$$2x^2-(2p+2)x+p^2-2p-3=0$$

$-x^2+2x+4=(x-p)^2-2p+1$ が共有点をもつとき、$2x^2-(2p+2)x+p^2-2p-3=0$ の判別式を D とすると、$D \geqq 0$ であればよい

$$\begin{aligned} D/4=(p+1)^2-2(p^2-2p-3) &\geqq 0 \\ p^2+2p+1-2p^2+4p+6 &\geqq 0 \\ -p^2+6p+7 &\geqq 0 \\ p^2-6p-7 &\leqq 0 \\ (p-7)(p+1) &\leqq 0 \\ \therefore\ -1 \leqq p &\leqq 7 \end{aligned}$$

【(3) の解説】
これは、本当に典型問題なので解けないといけません。$P,\ Q$ ２つの 2 次関数の交点を $x=\alpha,\beta$ とします。

求める面積は P が上に凸な 2 次関数、Q が下に凸な 2 次関数なので、$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲では、当然 P の方が Q よりも上になります。

従って求める面積 S は $S=\displaystyle\int_\alpha^\beta \left\{(-x^2+2x+4)-\{(x-p)^2-2P+1\}\right\}dx$ となります。

積分の中身の $(-x^2+2x+4)-\{(x-p)^2-2P+1\}$ は x^2 の係数が -2 であることと、$P,\ Q$ の交点が $x=\alpha,\beta$ であることを考えて、$(-x^2+2x+4)-\{(x-p)^2-2P+1\}=-2(x-\alpha)(x-\beta)$ となります。

後、$(\beta-\alpha)^3=\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$ として、解いていくことも覚えておいてください。それでは、解答に進みます。

【(3) の解答】

P と Q で囲まれた部分の面積を S とし、P と Q の交点を $\alpha, \beta\ (\alpha \leqq \beta)$ とする。

α, β は $2x^2-2(p+2)x+p^2-2p-3=0$ の 2 解であるので、解と係数の関係より

$\alpha+\beta=p+1,\ \alpha\beta=\dfrac{p^2-2p-3}{2}$ となる。

$$
\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^\beta \left\{(-x^2+2x+4)-\{(x-p)^2-2p+1\}\right\}dx \\
&= -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\
&= -2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}\ (\because\ (1)) \\
&= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 \\
&= \frac{1}{3}\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

ここで、$(\beta-\alpha)^2$ が最大となるとき S も最大となるので、以下 $(\beta-\alpha)^2$ の最大値を求める。

$$
\begin{aligned}
&(\beta-\alpha)^2 \\
=&(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\
=&(p+1)^2-4\frac{p^2-2p-3}{2}
\end{aligned}
$$

◀ $\alpha+\beta=p+1,\ \alpha\beta=\dfrac{p^2-2p-3}{2}$ をそれぞれ代入した

$$
\begin{aligned}
=&p^2+2p+1-2p^2+4p+6 \\
=&-p^2+6p+7 \\
=&-(p^2-6p)+7 \\
=&-(p-3)^2+16
\end{aligned}
$$

(2) より、$-1 \leqq p \leqq 7$ を考え $(\beta-\alpha)^2$ は $p=3$ のとき最大値 16 をとる。

$S=\dfrac{1}{3}\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$ を考え S は $p=3$ のとき、最大値 $\dfrac{1}{3}\cdot 16^{\frac{3}{2}}=\dfrac{64}{3}$ をとる。

今回は、これで終了です。数学 II の微積分の問題で本当に典型的な問題なので解けないといけないですが、決して簡単な問題ではないので解けなくても悲観することはありません。

何度も解きなおして、しっかりと理解しておいてください。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com