問題

点 P は数直線上を原点から出発して、投げたサイコロの目が 1, 2, 3 または 4 なら正の向きに 2 進み、5 または 6 なら負の向きに 1 進むとする。点 P の座標を x として、サイコロを n 回投げたとき、$x = 15$ となる確率を p_n とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) n 回中、5 または 6 の目が k 回出る確率を n と k を用いて表せ。ただし、$k = 0, 1, \cdots, n$ とする。

(2) p_9 と p_{10} を求めよ。

(3) $n \geqq 9$ とするとき、p_n を求めよ。

2003 年の新潟大学の過去問です。確率の問題ですが、超がつくほどの有名問題です。こういったタイプの問題は、連立方程式を自分で作って解いていくということを覚えておいてください。

(1)

【解説】

文字を含んでいますが、単なる反復試行の確率です。反復試行の確率を理解していないという人はこちらのページを見てください。http://www.hmg-gen.com/kaitou1-14.pdf

【解答】

サイコロを 1 回投げたとき、5 か 6 の出る確率は $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$、1,2,3 または 4 が出る確率は $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ である。

n 回中、5 または 6 が k 回出るので、1,2,3 または 4 が出る回数は $n - k$ 回である。

よって、求める確率は

$$
\begin{aligned}
&{}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \cdot \frac{1}{3^k} \cdot \frac{2^{n-k}}{3^{n-k}} \quad \blacktriangleleft\ {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \text{ より} \\
&= \frac{n! \cdot 2^{n-k}}{k!\,(n-k)! \cdot 3^n}
\end{aligned}
$$

(2)

【解説】

(1) で求めたように、1, 2, 3 または 4 が出た回数と、5 か 6 の出た回数を知ることができたら簡単に確率は求めることができます。

この回数を知るために簡単な連立方程式を使います。

1,2,3 または 4 の出た回数を a 回、5, 6 が出た回数を b 回とすると、p_9 の場合、9 回投げたとき x が 15 にいる確率を求める訳なので、

まず、あわせて 9 回投げるので $a+b=9$ という関係式が成立します。

また、1,2,3 または 4 が出たとき正の向きに 2 進み、5,6 が出たときは負の向きに 1 進むので、1,2,3 または 4 の出た回数を a 回、5, 6 が出た回数を b 回でたときにいる点は $2a-b$ となります。これが 15 になると言っているので、$2a-b=15$ となります。

後は $a+b=9$ と $2a-b=15$ を連立すると a, b の値が求まるので、これらを使って確率を求めていきます。

また、この連立方程式を解いて a, b が整数解とならないことがあります。a, b は回数なので当然整数でないといけません。整数でないときは、それはおこりえないということなので、確率は 0 となります。今回もそれが出てきますが、たまに出てくるので覚えておいてください。

【解答】
まず p_9 を求める。1,2,3 または 4 が a 回、5,6 が b 回でたとする。

あわせて 9 回投げるので、$a+b=9\cdots$①
$x=15$ の位置にいるので、$2a-b=15\cdots$②

① と ② を連立して、$a=8,\ b=1$ となる。よって、p_9 は

$${}_9\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{256}{2187}$$

次に、p_{10} を求める。1,2,3 または 4 が c 回、5,6 が d 回でたとする。

あわせて 9 回投げるので、$c+d=10\cdots$①
$x=15$ の位置にいるので、$2c-d=15\cdots$②

① と ② を連立しても c, d はともに整数とならない。これはおこりえない。よって、求める確率 p_{10} は 0 である。

(注) 今回は連立方程式という解き方を理解してもらうために、わざわざこういった解法にしましたが、(1) で求めた結果を使って求めていったもいいです。むしろ、流れとしては (1) を使う方が一般的だと思います。簡単なので、別解は割愛します

(3)

【解説】

これも同じように解いていくだけです。

【解答】

(1) で考えたように 5 または 6 が k 回、1,2,3 または 4 が $n-k$ 回出たとする。ただし、$n \geqq 9$

5 または 6 のとき負の方向に 1 進み、1,2,3 または 4 が出たとき正の方向に 2 進むので、6 が k 回、1,2,3 または 4 が $n-k$ 回でたときの座標は $-k+2(n-k)=2n-3k$ となる。

求める確率は座標が 15 となるときなので、$2n-3k=15$ となる。

$$
\begin{aligned}
2n-3k&=15\\
3k&=2n-15\\
k&=\frac{2}{3}n-5
\end{aligned}
$$

上記のようになるが、n, k がともに整数であるとき以外、求める確率 p_n は 0 となる。$k=\frac{2}{3}n-5$ より、ともに整数となるには n が 3 の倍数である必要がある。以下、n が 3 の倍数のときを考える。

よって、求める確率は (1) で計算した $\frac{n!\cdot 2^{n-k}}{k!\,(n-k)!\cdot 3^n}$ に $k=\frac{2}{3}n-5$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{n!\cdot 2^{n-k}}{k!\,(n-k)!\cdot 3^n}\\
=&\frac{n!\cdot 2^{n-\left(\frac{2}{3}n-5\right)}}{\left(\frac{2}{3}n-5\right)!\left\{n-\left(\frac{2}{3}n-5\right)\right\}!\cdot 3^n} \quad \blacktriangleleft k=\frac{2}{3}n-5\text{を代入した}\\
=&\frac{n!\cdot 2^{\frac{n}{3}+5}}{\left(\frac{2}{3}n-5\right)!\left(\frac{n}{3}+5\right)!\cdot 3^n} \quad \blacktriangleleft \text{これが答え}
\end{aligned}
$$

以上より、

(ｉ) n が 9 以上の 3 の倍数でないとき、$p_n = 0$

(ii) n が 9 以上の 3 の倍数のとき、$p_n = \dfrac{n! \cdot 2^{\frac{n}{3}+5}}{\left(\frac{2}{3}n - 5\right)! \left(\frac{n}{3} + 5\right)! \cdot 3^n}$

今回の問題はどうだったでしょうか 1，2 年生にとっては少し難しかったかもしれません。文字式が少し複雑で見にくかったかもしれませんが、このくらいは受験で頻出で今回の問題は難易度としては、簡単なレベルです。確率は、難しい科目ですが、入試でも出やすい単元です。しっかりと勉強をしておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com