

問題

p, q を正の実数とする。 x の方程式

$$\log_{10}(px) \cdot \log_{10}(qx) + 1 = 0$$

が1より大きい解をもつとき、点 $(\log_{10} p, \log_{10} q)$ の存在する範囲を座標平面上に図示せよ。

今回の問題は2008年の筑波大学の過去問です。それほど、難しい問題ではありませんが「対数、領域、2次関数」といろいろな単元の知識が必要なので、受験問題に慣れていない人にとっては少し難しかったかもしれません。

ただ、解答を読んでもらえば分かると思いますが、やっていることはとにかくごくごく基本的なことばかりです。ただ、どこでその知識を使うのか気づきにくいという人も多かったと思います。普段学校でしている問題と受験問題の違いを感じるのにいい問題だと思います。それでは、問題の解説に進みます。

【解説】

$\log_{10}(px) \cdot \log_{10}(qx) + 1 = 0$ となっていて、この解が1より大きいとなっています。

そこで、よく分からないけどとりあえず対数の公式 $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$ を使って式変形をしていきます。

$$\log_{10}(px) \cdot \log_{10}(qx) + 1 = 0$$

$$(\log_{10} p + \log_{10} x) \cdot (\log_{10} q + \log_{10} x) + 1 = 0 \quad \leftarrow \text{対数の公式 } \log_a AB = \log_a A + \log_a B \text{ を使った}$$

で、ここから考えていくんですけど $(\log_{10} p + \log_{10} x) \cdot (\log_{10} q + \log_{10} x) + 1 = 0$ は、 x を含んだ式は $\log_{10} x$ のみなので、見やすくするために $\log_{10} x = X$ とします。また、 $\log_{10} p = P, \log_{10} q = Q$ とでも置き換えるととします。

そうすると、 $(\log_{10} p + \log_{10} x) \cdot (\log_{10} q + \log_{10} x) + 1 = 0$ は $(X + P) \cdot (X + Q) + 1 = 0$ となります。

問題文に $(\log_{10} p + \log_{10} x) \cdot (\log_{10} q + \log_{10} x) + 1 = 0$ は x は1より大きい解をもつと書いてあります。 $\log_{10} x = X$ というふうに置き換えたのですから、 $x > 1$ のとき $X > 0$ となります。

このことより、 $(\log_{10} p + \log_{10} x) \cdot (\log_{10} q + \log_{10} x) + 1 = 0$ が $x > 1$ の解をもつとは、 $(X + P) \cdot (X + Q) + 1 = 0$ が $X > 0$ の解をもつと言い換えることができます。

↑実はこの部分まで理解できると、この問題はほとんど、できたも同然です。

ここからは少しややこしいですが、単なる2次関数の解の問題です。丁寧に解いていけば間違えることはないと思います。

普段解いている学校の問題では、このように文字が複雑だったりすることはあまりありません。ですが、「やっていることは同じだな」と感じられるようにしておいてください。

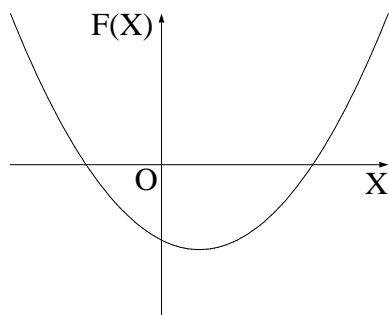
ここからは「2次方程式の解の存在範囲」という問題です。数学Iの教科書にも載っているとしますので、自分で勉強しておいてください。

ポイントとしては、判・軸・端に着目して解いていくことです。判とは判別式の正負、軸とは軸の方程式の位置、端とは y の正負の分かる点のことです。

$F(X) = (X + P) \cdot (X + Q) + 1 = X^2 + (P + Q)X + PQ + 1$ とします。 $F(X) = 0$ が $X > 0$ で解をもつのは次のような場合です。軸が X 軸の右側、左側で場合分けする手法もあるかもしれませんが、 $F(0) < 0$ で解をもつ場合と、 $F(0) \geq 0$ で解をもつ場合の2通りに場合分けをしたいと思います。

(I)

$F(0) < 0$ で、 $X > 0$ に解をもつ場合



$F(0) < 0$ で、 $X > 0$ に解をもつ場合としましたが、実は $F(0) < 0$ を満たした時点で、 $F(X) = 0$ は $X > 0$ という解をひとつもちます。(←これは数学Iを勉強した人なら、分かりますよね?)

ですから、 $F(0) < 0$ がそのまま求める領域となります。

$F(X) = X^2 + (P + Q)X + PQ + 1$ なので、 $F(0) = PQ + 1$ となり、 $F(0) < 0$ のとき、 $PQ + 1 < 0$ となります。

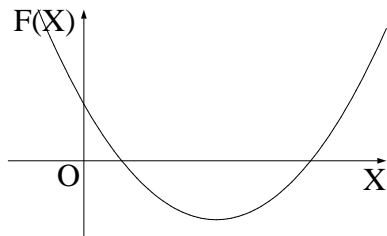
$PQ < -1$ は、両辺を P で割って、 $Q < -\frac{1}{P}$ とついしてしまいそうになりますが、両辺を変数で割るときは、正負に注意しないといけないんだよね。

$P > 0$ のときは両辺を P で割っても不等号の向きは変わらないけど、 $P < 0$ のときは両辺を P で割ると不等号の向きが反対になります。

ちなみに、 $P = 0$ のときなんですけど、 $PQ + 1 < 0$ に $P = 0$ を代入すると、 $0 \cdot Q + 1 < 0 \Rightarrow 1 < 0$ となり、 $1 < 0$ となることはあり得ないので不適となります。次に $F(0) \geq 0$ となる場合を考えていきます。

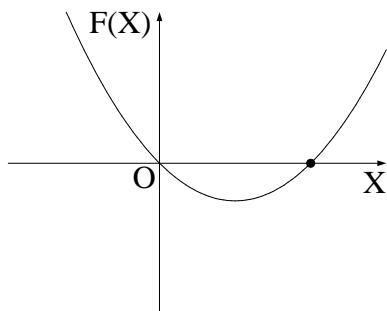
(II)

$F(0) \geq 0$ で、 $X > 0$ に解をもつ場合



↑上記のようになればOKです。判・軸・端で考えていきますが、 $D \geq 0$, (軸の方程式(頂点の x 座標のこと)) > 0 , $F(0) \geq 0$ となります。

ちなみに $F(0) \geq 0$ とイコールが含まれていますが、 $F(0) = 0$ のときはOKなの?と感じた人もいると思います。これは、OKです。なぜかというとな記のような図になったときも、 $X > 0$ で解をもつからです。



上図のように $F(X) = 0$ でも、 $X > 0$ で解をもつので $F(0) \geq 0$ とイコールを含んでOKです。

以上のことを踏まえて解答に進みたいと思います。領域が少し複雑ですが、丁寧に解いていけば大丈夫だと思います。

【解答】

$$\log_{10}(px) \cdot \log_{10}(qx) + 1 = 0 \cdots (*)$$

$$(\log_{10} p + \log_{10} x) \cdot (\log_{10} q + \log_{10} x) + 1 = 0$$

ここで、 $\log_{10} x = X$, $\log_{10} p = P$, $\log_{10} q = Q$ とする。

$$(P + X) \cdot (Q + X) + 1 = 0$$

$$X^2 + (P + Q)X + PQ + 1 = 0$$

ここで $F(X) = X^2 + (P + Q)X + 1$ とする。 $(*)$ が $x > 1$ で解をもつとき、 $F(X) = 0$ が $X > 0$ の解をもつ。

以下 $F(X) = 0$ が $X > 0$ で解をもつ場合を考える。

(I)

$F(0) < 0$ で、 $X > 0$ に解をもつ場合

$F(X) = 0$ が $X > 0$ に解をもつには $F(0) < 0$ であればよい。

$$F(0) = PQ + 1 < 0$$

$$PQ < -1$$

$P = 0$ のとき、 $PQ < -1$ は不成立。よって、 $P \neq 0$ のときを考える。

(i) $P > 0$ のとき

$$PQ < -1$$

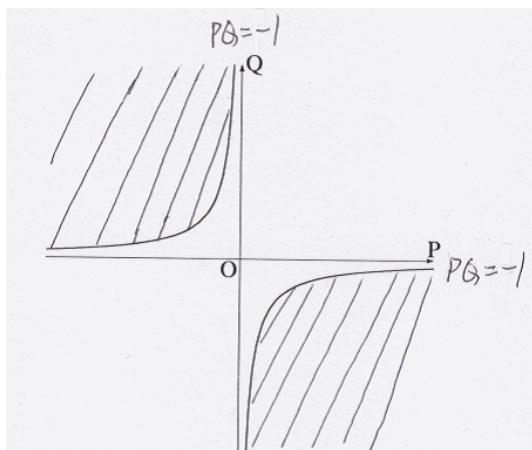
$$Q < -\frac{1}{P}$$

(ii) $P < 0$ のとき

$$PQ < -1$$

$$Q > -\frac{1}{P}$$

以上を考え、 $PQ < -1$ を図示すると



ただし、境界は含まない

(II)

$F(0) \geq 0$ で、 $X > 0$ に解をもつ場合

$F(X) = 0$ の判別式を D とする。また、 $F(X) = X^2 + (P + Q)X + PQ + 1$ より $F(X)$ の軸の方程式は $x = -\frac{P+Q}{2}$ となる。

$F(0) \geq 0$ で、 $X > 0$ に解をもつには $D \geq 0$, $-\frac{a+b}{2} > 0$, $F(0) \geq 0$ が必要

$D \geq 0$ より

$$(P + Q)^2 - 4(PQ + 1) \geq 0 \quad \leftarrow D = b^2 - 4ac \text{ より}$$

$$P^2 + 2PQ + Q^2 - 4PQ - 4 \geq 0$$

$$P^2 - 2PQ + Q^2 - 4 \geq 0$$

$$(P - Q)^2 - 4 \geq 0$$

$$(P - Q + 2)(P - Q - 2) \geq 0$$

(注) この式変形はなかなか気づきにくいかもしれないが、領域を図示するにはグラフをかく必要がある。 $P^2 - 2PQ + Q^2 - 4 = 0$ なんて関数はグラフをかけない。そこで、グラフをかくには? と考えたら気づけるようになります。 $(P - Q + 2)(P - Q - 2) \geq 0$ これだったら、単なる1次関数の積なので、グラフをかけるよね?

$$(P - Q + 2)(P - Q - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow P - Q + 2 \geq 0 \text{ かつ } P - Q - 2 \geq 0$$

または

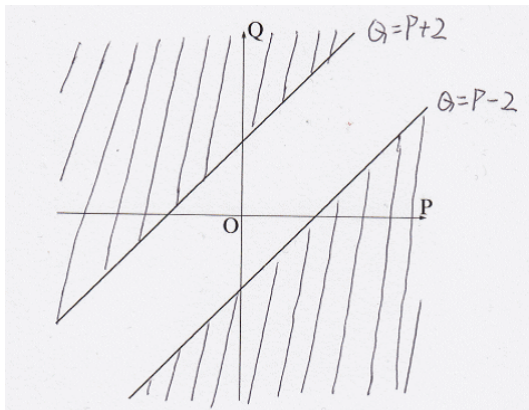
$$P - Q + 2 \leq 0 \text{ かつ } P - Q - 2 \leq 0$$

↑互いに掛け合わせて正となるのは、両方とも正の場合が両方とも負の場合の2通り

$$P - Q + 2 \geq 0 \text{ かつ } P - Q - 2 \geq 0 \Leftrightarrow Q \leq P + 2 \text{ かつ } Q \leq P - 2$$

$$P - Q + 2 \leq 0 \text{ かつ } P - Q - 2 \geq 0 \Leftrightarrow Q \geq P + 2 \text{ かつ } Q \geq P - 2$$

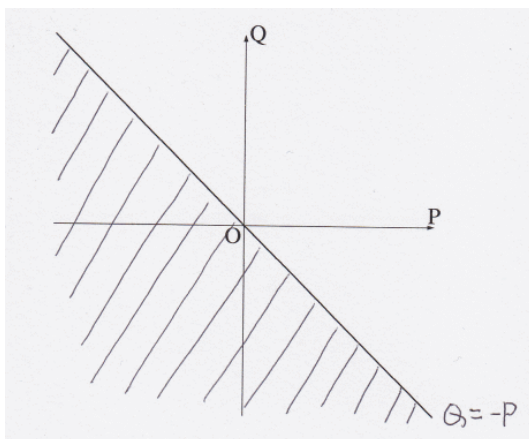
これを図示すると次の通り



境界を含む。この図を図1とする。

$$-\frac{P+Q}{2} > 0$$
$$Q < -P$$

これを図示すると次の通り



ただし境界は含まない。この図を図2とする。

$$PQ + 1 \geq 0$$

$$PQ \geq -1$$

$P = 0$ のとき、 $PQ \geq -1$ は成立する。

(i) $P > 0$ のとき

$$PQ \geq -1$$

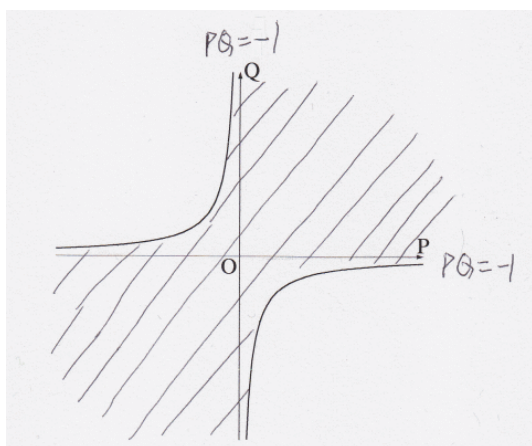
$$Q \geq -\frac{1}{P}$$

(ii) $P < 0$ のとき

$$PQ \geq -1$$

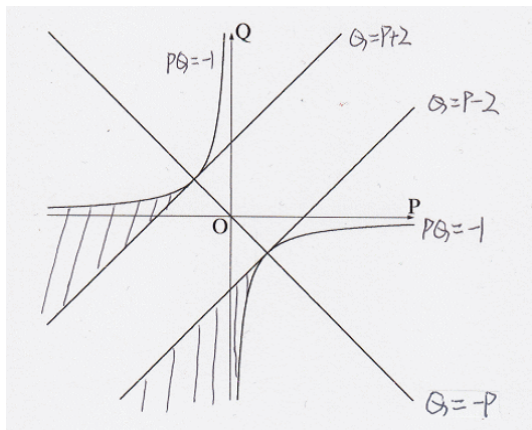
$$Q \leq -\frac{1}{P}$$

以上を考え、 $PQ \geq -1$ を図示すると次の通り。



境界を含む。この図を図3とする。

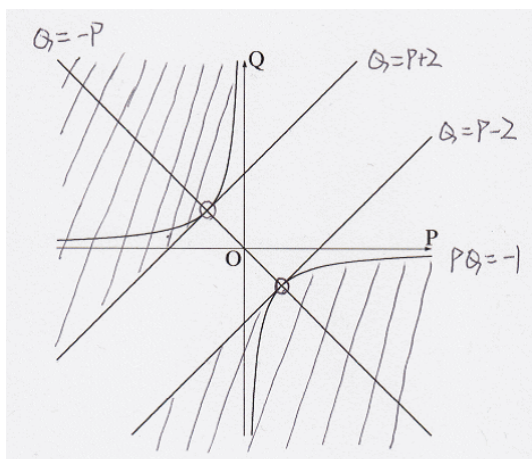
図1、図2、図3より、図示すると次の通り。



ただし境界は含まない。

↑ 図1、図2、図3のすべてを満たしている部分

(I)(II)より、求める領域は次のようになる。



ただし $Q = P \pm 2$ との境界は含み、 $PQ = -1$ との境界は含まない。また、白丸部分は含まないものとする。

↑ (I) または (II) を満たしている部分が答え

今回の問題はどうかだったでしょうか？問題の難易度としてはそれほど高くないですが、い

ろいろな単元の知識が必要となるので、少し難しかったかもしれませんが。ですが、受験問題としてはごくごく標準的な問題ですので、ぜひとも解けるようになっておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com