問題

座標平面上で、不等式 $y \leqq -ax^2 + b$ の表す領域を A とし、不等式 $x^2 + y^2 \leqq 1$ の表す領域を B とする。ただし、$a > \dfrac{1}{2}$ かつ $b > 0$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y = -ax^2 + b$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を a, b で表せ

(2) B が A に含まれるための必要十分条件は、$b \geqq \dfrac{1 + 4a^2}{4a}$ であることを示せ。

(3) B が A に含まれるとき、(1) で求めた面積 S が最小となる a, b およびそのときの S を求めよ。

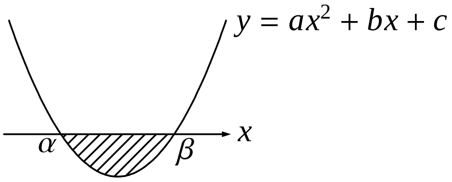
今回の問題は 2008 年の新潟大学の過去問です。この問題は、考えることも不要でごくごく普通に解いていくだけです。考え方としては簡単ですが、計算量がやや多いので新潟大学では標準かやや難しい部類の問題に入ると思います。

ただ、国公立大学を目指すのならこの程度の問題なら簡単だと思えるくらいにはなっておいて欲しいです。それでは、問題の解説に進みます。

【(1) の解説】
放物線と x 軸によって囲まれた部分の面積です。次のことは知っていると思います。知らなかったという人はしっかりと覚えておいてください。

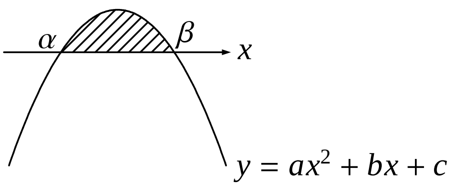
放物線と x 軸によって囲まれた部分の面積

(i) $a > 0$ のとき



$$S = \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$$

(ii) $a < 0$ のとき



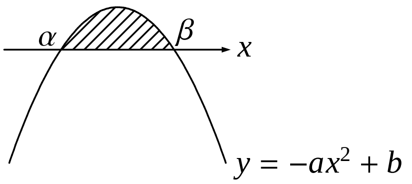
$$S = \frac{-a}{6}(\beta - \alpha)^3$$

それでは、問題に戻ります。今回は $-ax^2 + b = 0$ の解 (つまり $y = -ax^2 + b$ と x 軸との交点) は $x = \pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ と汚いです。こういった問題では、最初から汚い数値を入れて計算す

るのではなく、例えばこの問題では、$\alpha = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}, \beta = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ などと文字でおいてから計算していき、最後に代入した方が計算ミスが少ないです。それでは解答に進みます。

【(1) の解答】

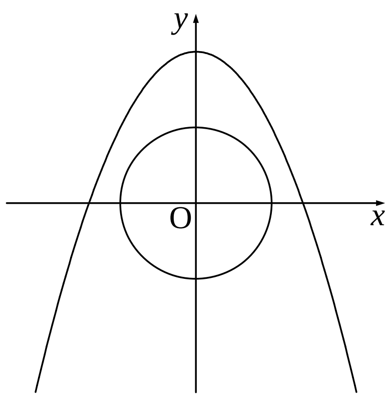
$-ax^2 + b = 0$ の解を $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ とする。$\alpha = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}, \beta = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ となる。



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\beta} (-ax^2 + b)\, dx \\
&= \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3 \quad \text{◀ 上記の公式を使った} \\
&= \frac{a}{6}\left\{\sqrt{\frac{b}{a}} - \left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right\}^3 \quad \text{◀ } \alpha = -\sqrt{\frac{b}{a}}, \beta = -\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ をそれぞれ代入した} \\
&= \frac{a}{6}\left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^3 \\
&= \frac{a}{6} \cdot 8\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b}{a}} \\
&= \frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{◀ これが答え}
\end{aligned}
$$

【(2) の解説】

少し表現としては、分かりにくいですが $B;\ x^2 + y^2 \leqq 1$ が $A:\ y \leqq -ax^2 + b$ に含まれるとは、下記のようになったときです。



要するに、$y=-ax^2+b$ 上のすべての点 (x, y) が $x^2+y^2 \geqq 1$ を満たしていれば OK です。この逆でもいいです。すべての $x^2+y^2=1$ 上の点 (x, y) が $y \leqq -ax^2+b$ を満たしているとしてもいいです。

ただ、前者の「$y=-ax^2+b$ 上のすべての点 (x, y) が $x^2+y^2 \geqq 1$ を満たしている」の方が計算しやすそうなのでこの解き方で解いていきます。

$y=-ax^2+b$ かつ $x^2+y^2 \geqq 1$ が常に成立するような範囲を求めます。ここからどうするかと言えば、当然文字消去です。

今回は、$y=-ax^2+b$ を $x^2+y^2 \geqq 1$ に代入をして y を消去して x のみの式にしてもいいですが、実際やってもらえば分かると思いますがこれでは x が 4 次式になってしまいます。

ですから、今回は x を消去していきます。

$y=-ax^2+b$ より $x^2=\dfrac{b-y}{a}$ となります。これで文字消去していくわけですが、文字消去するときは当然範囲について考えないといけません。

$x^2=\dfrac{b-y}{a}$ から文字消去するのですが、x^2 は 2 乗するので当然 $x^2 \geqq 0$ という条件式が成立します。$x^2=\dfrac{b-y}{a}$ と x^2 と $\dfrac{b-y}{a}$ が等しいのですから、当然 $\dfrac{b-y}{a}$ にも、$\dfrac{b-y}{a} \geqq 0$ という条件が生まれてきます。
(注) 本当に基本的なことですが、上記の文字消去が分からないという人は、http://www.hmg-gen.com/h-mojisyoukyo.pdf のページで勉強して下さい

$\dfrac{b-y}{a} \geqq 0$ を解くと、$y \leqq b$ となり、y を消去すると $\dfrac{b-y}{a}+y^2 \geqq 1$ となります。

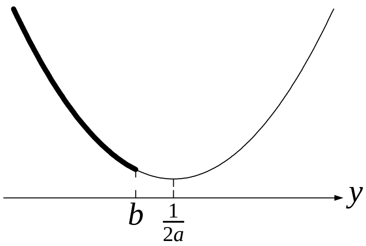
このことより、$\dfrac{b-y}{a}+y^2 \geqq 1$ が $y \leqq b$ で常に成立すればよいということになります。ここからは、単なる 2 次関数の問題です。

$\dfrac{b-y}{a}+y^2 \geqq 1$ は $ay^2-y+b-a \geqq 0$ となります。これが任意の $y \leqq b$ について成立すればＯＫなので、$F(y)=ay^2-y+b-a$ とすると、$y \leqq b$ における $F(y)$ の最小値が 0 以上であるとき条件が成立します。
⇑ $F(y)$ の最小値が 0 以上だったら、当然 $F(y) \geqq 0$ が常に成立するよね？

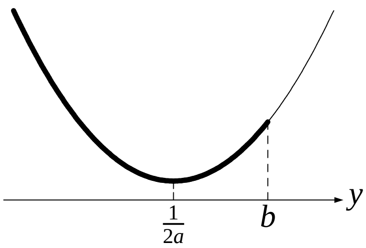
ここからは、次のように軸の位置によって場合分けが必要です。

$F(y) = ay^2 - y + b - a = a\left(y - \dfrac{1}{2a}\right)^2 - \dfrac{1}{4a} + b - a$ ◀ 平方完成をした より、軸は $x = \dfrac{1}{2a}$ となります。

(ⅰ) $b < \dfrac{1}{2a}$ のとき、$y = b$ で最小となる。



(ⅱ) $b \geqq \dfrac{1}{2a}$ のとき、$y = \dfrac{1}{2a}$ で最小となる。



ここまで来たら、後は普通に解いていくだけなので簡単だと思います。それでは、解答に進みます。

【(2) の解答】

$y = -ax^2 + b \cdots$ ① 上のすべての点 (x, y) が $x^2 + y^2 \geqq 1 \cdots$ ② を満たしていればよい。

① より、$x^2 = \dfrac{b - y}{a}$ となる。$x^2 \geqq 0$ より $\dfrac{b - y}{a} \geqq 0$ つまり $y \leqq b$ となる。

$x^2 = \dfrac{b - y}{a}$ を ② に代入して、$\dfrac{b - y}{a} + y^2 \geqq 1$ となる。

よって、B が A に含まれる必要十分条件は $\dfrac{b - y}{a} + y^2 \geqq 1$ が $y \leqq b$ を満たすすべての y で成立することである。

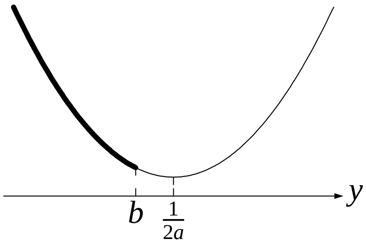
$\dfrac{b-y}{a} + y^2 \geqq 1$

$b - y + ay^2 \geqq a$ ◀ 両辺に a をかけた。$a = \dfrac{1}{2} > 0$ より不等号の向きは変わらない

$ay^2 - y + b - a \geqq 0$

$F(y) = ay^2 - y + b - a$ とする。$F(y) \geqq 0$ が $y \leqq b$ で常に成立すればよい。

(i) $b < \dfrac{1}{2a}$ のとき、



上図より、$y \leqq b$ で常に $F(y) \geqq 0$ となるのは、$F(b) \geqq 0$ であればよい。

$$
\begin{aligned}
F(b) &= ab^2 - b + b - a \\
&= ab^2 - a \geqq 0 \\
& \quad ab^2 \geqq a
\end{aligned}
$$

$a = \dfrac{1}{2}(> 0)$ より、両辺を a で割ると (不等号の向きは変わらない)

$b^2 \geqq 1$

また、$b > 0$ を考え、$b \geqq 1$ となる。

一方、$b < \dfrac{1}{2a}$ と $a > \dfrac{1}{2}$ という条件から $b < 1$ となる。

⇑ もともとの場合分けの条件より、$b < \dfrac{1}{2a}$ となります。また、問題文の a の条件は $a > \dfrac{1}{2}$ です。これから、

$a > \dfrac{1}{2}$

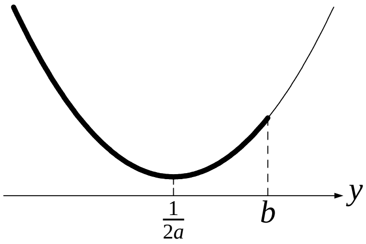
$\dfrac{1}{a} < 2$

$\dfrac{1}{2a} < 1$

よって、$b < \dfrac{1}{2a} < 1$ より、$b < 1$ となります。

$b \geqq 1$ かつ $b < 1$ となることはないので、この場合不適

(ii) $b \geqq \dfrac{1}{2a}$ のとき



上図より、$y \leqq b$ で常に $F(y) \geqq 0$ となるのは、$F\left(\dfrac{1}{2a}\right) \geqq 0$ であればよい。

$F(y) = ay^2 - y + b - a = a\left(y - \dfrac{1}{2a}\right)^2 - \dfrac{1}{4a} + b - a$ より、$F\left(\dfrac{1}{2a}\right) = -\dfrac{1}{4a} + b - a$ となるので、

$$F\left(\frac{1}{2a}\right) \geqq 0$$
$$-\frac{1}{4a} + b - a \geqq 0$$
$$b \geqq a + \frac{1}{4a}$$
$$b \geqq \frac{1 + 4a^2}{4a}$$

よって、$b \geqq \dfrac{1}{2a}$ かつ $b \geqq \dfrac{1+4a^2}{4a}$ であればよい。

ここで

ここから $b \geqq \dfrac{1}{2a}$ かつ $b \geqq \dfrac{1+4a^2}{4a}$ が $b \geqq \dfrac{1+4a^2}{4a}$ であるということを言わないといけない。こうなるためには $\dfrac{1+4a^2}{4a} \geqq \dfrac{1}{2a}$ が言えたらいい。それを示すために、$\dfrac{1+4a^2}{4a} - \dfrac{1}{2a}$ をして、その値が 0 以上であることを示す。

$$\frac{1+4a^2}{4a}-\frac{1}{2a}$$
$$=\frac{1+4a^2-2}{4a}$$
$$=\frac{4a^2-1}{4a}$$

ここで、$a>\frac{1}{2}$ のとき $4a^2-a>0$ より、$\frac{4a^2-1}{4a}>0$ がいえる。

よって、$\frac{4a^2-1}{4a}>0$ が言えるので、$\frac{1+4a^2}{4a}>\frac{1}{2a}$ が言える。

以上より、$b \geqq \frac{1}{2a}$ かつ $b \geqq \frac{1+4a^2}{4a}$ は $b \geqq \frac{1+4a^2}{4a}$ と同値である。

(i),(ii) より、B が A に含まれる必要十分条件は $b \geqq \frac{1+4a^2}{4a}$ である。

【(3) の解説】
(1) で求めた面積が最小となるのは a が一定の値をとったときは、b が最小となるときです。(2) より、$b \geqq \frac{1+4a^2}{4a}$ です。a を定数とみなすと $b=\frac{1+4a^2}{4a}$ のとき最小となります。後は、単なる微分の問題です。分数関数の微分なので計算が少しややこしいですが、ただ単に解いていくだけなのでそれほど難しくないと思います。

(1) より $S=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2}{a}}$ ですが、分数を含んでいては考えにくいので両辺を 2 乗します。
$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2}{a}}$ は正なので、２乗したものが最小となるとき、元のものも最小となります。

$S^2=\frac{16}{9}\cdot\frac{b^3}{a}$ となります。$\frac{b^3}{a}$ が最大となるときに S^2 も最小となるので、$\frac{b^3}{a}$ の最小値を考えていきます。

ここで、$b=\frac{4a^2+1}{4a}$ となるとき最小となるので、これを代入して解いていきます。

$$\frac{b^3}{a}$$

$$=\frac{\left(\frac{4a^2+1}{4a}\right)^3}{a}$$ ◀ $b=\dfrac{4a^2+1}{4a}$ を代入した

$$=\frac{\frac{(4a^2+1)^3}{(4a)^3}}{a}$$

$$=\frac{(4a^2+1)^3}{64a^3\cdot a}$$ ◀ 分母分子に $(4a)^3=64a^3$ をかけて分子の分数を払った

$$=\frac{(4a^2+1)^3}{4\cdot(4a^2)^2}$$ ◀ $4a^2$ のみの式になった

上記のように $4a^2$ のみの式になると言うことは、気づきにくいと思います。ただ 64 という数字を見て 4^3 だから、何か怪しいな。使えるのでは？ということ勘づいて欲しいです。

もし気づけなかったとしても、少し計算が面倒なだけで普通に解くことはできます。ただ、a^2 のみの式になるということくらいは気づけるようになっておいてください。

ここで、$4a^2=t$ とすると $t>1$ となる。

⇑ 文字を置き換えた時は範囲に注意するというのが鉄則です。今回は、$a>\dfrac{1}{2}$ という条件があったので、$4a^2$ は当然 $4a^2>1$ という範囲が存在します。

$S^2=\dfrac{(t+1)^3}{4t^2}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(t+1)^3}{t^2}$ ですが、当然 $\dfrac{1}{4}$ を外に出しても最小となるときは変わらないので、$\dfrac{1}{4}$ を外に出して計算していきます。それでは、以上のことを踏まえて解答に進みたいと思います。

【(3) の解答】

S の最小値を考える。

$$S=\frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$S^2=\frac{16b^2}{9}\cdot\frac{b}{a}$$

$$S^2=\frac{16}{9}\cdot\frac{b^3}{a}$$

$\dfrac{b^3}{a}$ が最小となるとき、S も最小となるので、以下 $\dfrac{b^3}{a}$ が最小となる場合を考える。

a が一定の値をとったとき、(1) より b が最小となるとき、S も最小となる。

(2) より、$b \geqq \dfrac{1+4a^2}{4a}$ より b の最小値は $b = \dfrac{1+4a^2}{4a}$ となる。このとき、S も最小となる。

$$\frac{b^3}{a}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{4a^2+1}{4a}\right)^3}{a}$$ ◀ $b = \dfrac{4a^2+1}{4a}$ を代入した

$$= \frac{\dfrac{(4a^2+1)^3}{(4a)^3}}{a}$$

$$= \frac{(4a^2+1)^3}{64a^3 \cdot a}$$ ◀ 分母分子に $(4a)^3 = 64a^3$ をかけて分子の分数を払った

$$= \frac{(4a^2+1)^3}{4 \cdot (4a^2)^2}$$ ◀ $4a^2$ のみの式になった

ここで、$4a^2 = t$ とする。$a > \dfrac{1}{2}$ より、$t > 1$ が言える。

$$= \frac{(t+1)^3}{4t}$$

$\dfrac{(t+1)^3}{t}$ が最小となるとき、$\dfrac{(t+1)^3}{4t^2}$ も最小となる。

$f(t) = \dfrac{(t+1)^3}{t^2}$ とする。

$$f(t) = \frac{(t+1)^3}{t^2}$$

$$f'(t) = \frac{3(t+1)^2 \cdot t^2 - (t+1)^3 \cdot 2t}{t^4}$$ ◀ 商の微分より

$$= \frac{(t+1)^2 t\left\{3t - 2(t+1)\right\}}{t^4}$$

$$= \frac{(t+1)^2(t-2)}{t^3}$$ ◀ 分母分子 t で約分をした

微分したのは正負を知りたいだけ、$f'(t) = \dfrac{(t+1)^2(t-2)}{t^3}$ となったが $\dfrac{(t+1)^2}{t^3}$ の部分は正 ($t > 1$ が言えているから) なので、$f'(t)$ の正負に影響しない。よって、$f'(t)$ の正負は

$t-2$ の正負と一致します。

当然 $t<2$ で $f'(t)<0$、$t>2$ で $f'(t)>0$ となります。

$t>\frac{1}{2}$ の範囲で $f(t)$ の増減表をかくと、次のようになる。

t	$\frac{1}{2}$		2	
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$

図より、$t=2$ のときに最小となる。

$4a^2=t, a>\frac{1}{2}$ を考え $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ また、$b=\frac{4a^2+1}{4a}$ より、$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $b=\frac{3}{4}\sqrt{2}$ となる。

このとき $S=\frac{4b}{3}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}$ より、$S=\sqrt{3}$ となる。

以上より、S は $a=\frac{\sqrt{2}}{2}, b=\frac{3}{4}\sqrt{2}$ のとき、最小値 $\sqrt{3}$ をとる。

今回の問題はどうだったでしょうか？紙面で説明するため少し書く内容が多かったですが、やっていることはごくごく簡単なことです。この問題は入試標準レベルです。こういった問題をテキパキとこなせるようにしておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com