

問題

$x > 0$ において定義された関数 $y = f(x) = x(1 + \log x)$ のグラフを C とする。また、曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における C の接線 l の方程式を $y = g(x)$ とする。このとき、次の問いに答えよ

- (1) $g(x)$ を求めよ
- (2) $x > 0$ において、 $f(x) \geq g(x)$ であることを示せ
- (3) 2 直線 $x = 1, x = 2$ と曲線 C および接線 l で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。
- (4) t が $t > 0$ の範囲を動くとき、面積 $S(t)$ が最小となる t を求めよ。

2004 年の新潟大学の理系の過去問です。内容としては微分積分で「接線、微分を使った不等式の証明、面積、最大値・最小値」と本当にもりだくさんです。

1 題、1 題としては決して難しい問題ではないですが、計算量が多いことを考えるとそれほど簡単な問題ではないと思います。多くの国公立大学でそうですが、この大学も試験時間は 120 分で、問題数は 5 問です。単純に割ると、1 問にかけられる時間は 24 分です。

この問題は、だいたい 20 分を目安に解いてください。それでは、問題に進みます。

【(1) の解説】

これは、ただ単に微分をして接線を求めるだけの問題で簡単です。

【(1) の解答】

$$\begin{aligned} f(x) &= x(1 + \log x) \\ &= x'(1 + \log x) + x(1 + \log x)' \quad \leftarrow \text{積の微分より} \\ &= 1 + \log x + x \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2 + \log x \end{aligned}$$

よって、求める接線の傾き m は $m = f'(t) = 2 + \log t$ となる。求める接線は傾き $2 + \log t$ で点 $(t, t(1 + \log t))$ を通る直線なので、

$$\begin{aligned} g(x) - t(1 + \log t) &= (2 + \log t)(x - t) \\ g(x) &= (2 + \log t)x - 2t - t \log t + t + t \log t \\ &= (2 + \log t)x - t \quad \leftarrow \text{これが答え} \end{aligned}$$

【(2) の解説】

微分を使った不等式の証明問題です。このタイプの問題は教科書にも必ず載っているの
で解けないといけない問題です。

$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$ です。 $h(x) = f(x) - g(x)$ とでもおくと $h(x) \geq 0$ であることを示せばいいです。

$h(x)$ の最小値が 0 以上だと、当然 $h(x) \geq 0$ が成立します。 $h(x)$ の最小値を求めるわけですが、微分をします。

(注) なぜ最小値を求める時、微分をするか分かっていない人が多いです。簡単に説明します。

まず、関数の最大値、最小値問題はグラフをかいて考えると言うことが鉄則です。このことを知らないという人は、本当に簡単なプリントですが <http://www.hmg-gen.com/tecni1a-12.pdf> を見てください。

で、関数の最大値、最小値問題を解くにはグラフをかく必要があるのですが、グラフをかくには微分をする必要があります。ですから、関数の最大値、最小値問題はまず微分をします。

今回の問題でもそうですが、微分の問題ではグラフをかく以前の増減表の段階で最小値が分かってしまいましたが、「なぜ微分をするのか？」というのは「グラフをかくため」ということを覚えておいてください。

【(2) の解答】

$$f(x) \geq g(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$$

$h(x) = f(x) - g(x)$ として、 $h(x) \geq 0$ を示す。

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$= x(1 + \log x) - \left\{ (2 + \log t)x - t \right\}$$

$$= x(1 + \log x) - (2 + \log t)x + t$$

$$h'(x) = x'(1 + \log x) + x(1 + \log x)' - (2 + \log t)$$

$$= 1 + \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 2 - \log t$$

$$= 1 + \log x + 1 - 2 - \log t$$

$$= \log x - \log t$$

ここから $h'(x)$ の正負を調べます。微分は正か負かということさえ分かれば十分です。

で、今回は $\log x - \log t$ の正負を調べる訳ですが、 $\log x - \log t$ の正負は $x - t$ の正負と一致するってことは分かるよね？(このくらいはちょっとすぐに分かって欲しいです …)

$y = \log x$ というのは単調増加です。そのことから x が大きいほど y も大きくなる、ということから $\log x$ と $\log t$ の大小関係は x と t の大小関係と一致します。

$x - t$ の正負は $x < t$ のとき、 x より t の方が大きいです。小さいものから大きいものを引くので $x - t$ はマイナスとなります。

また、反対に $x > t$ のとき、 x の方が t より大きいです。大きいものから小さいものを引くので $x - t$ はプラスとなります。

増減表は次のようになります。

t	0		t	
$h'(t)$		-	0	+
$h(t)$		↘	$h(t)$	↗

増減表より、 $h(x)$ は $x = t$ で極小かつ、最小となる。

$$\begin{aligned} h(t) &= t(1 + \log t) - (2 + \log t)t + t \leftarrow h(x) = x(1 + \log x) - (2 + \log t)x + t \text{ に } x = t \text{ を代入した} \\ &= t + t \log t - 2t - t \log t + t \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、 $h(t)$ の最小値は0となるので、 $h(x) \geq 0$

以上より、 $x > 0$ の範囲で $f(x) \geq g(x)$ が成立する。

【(2)の別解の解説】

(2)は、一応まじめ?に証明したけど次のようなことを考えると、視覚的にあきらかです。まず、意外に知らない人が多いけど次のことを覚えておいてください。

関数の凸

$f''(x) > 0$ のとき、 $y = f(x)$ は下に凸な関数である。

$f''(x) < 0$ のとき、 $y = f(x)$ は上に凸な関数である。

(注) 上記はどっちに凸だったか、少し忘れやすいです。いい覚え方があるので紹介しておきます。

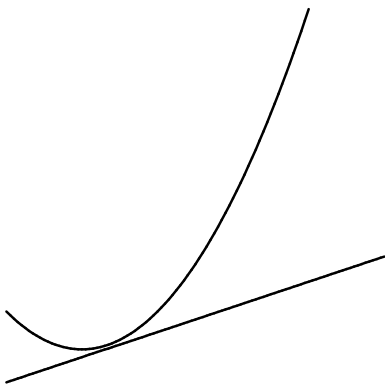
$y = x^2$ は下に凸な関数だよな? で、 $y = x^2$ を 2 階微分すると $y'' = 2$ と正です。ですから、2 階微分をして正のものは下に凸な関数です。

反対に、 $y = -x^2$ は上に凸な関数だよな? で、 $y = -x^2$ を 2 階微分すると $y'' = -2$ と負です。ですから、2 階微分をして負のものは上に凸な関数です。

上記は、証明でもなんでもないのでこうしておく、どっちが上に凸か忘れたときに思い出すことができます。

今回は、 $f(x) = x(1 + \log x)$ でした。これを 2 階微分すると $f''(x) = \frac{1}{x}$ です。この問題は $x > 0$ の範囲なので $f''(x) > 0$ となるので、 $y = f(x)$ は上に凸な関数です。

上に凸な関数と接線は以下ようになります。

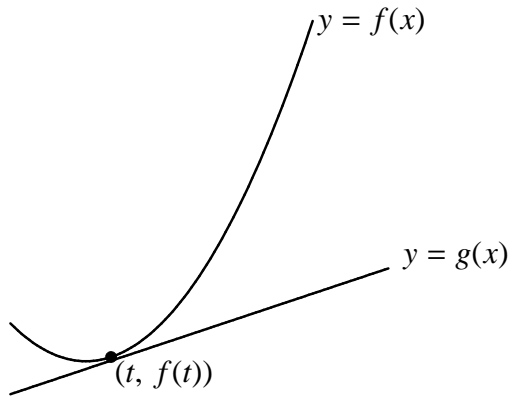


上図を見てもらえば、分かると思いますが下に凸な関数を $y = f(x)$ とします。そして、その接線を $y = g(x)$ とでもします。そうすると、接点がどこであろうが常に、 $f(x) \geq g(x)$ が成立します。

【(2) の別解】

$f(x) = x(1 + \log x)$ を2階微分すると $f''(x) = \frac{1}{x}$ となる。

$x > 0$ のとき、 $f''(x) > 0$ となるので、 $y = f(x)$ は下に凸となる。これをもとに接線 $y = g(x)$ を図示すると、下図のようになる。



よって、 $x > 0$ のとき、 $f(x) \geq g(x)$ となる。

【(3)の解説】

積分で面積や体積を求めよという問題のとき、なんでもかんでも微分をしてグラフをかこうとする人がいるけど、それは面倒だからよしておいた方がいいです。

面積の場合、グラフの上下関係さえわかれば式を立てることができるんだから、上下関係が分かる場合、微分をする必要はありません。

今回の問題でも、(2)で $f(x) \geq g(x)$ と $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の上下関係が分かっているんだから、微分をする必要はありません。

知っている人が多いとは思いますが、大学受験では、前問の結果を使って解いていくことが多いです。ですから、問題を見たときに、前問の結果を使えないかな？と考えるようにしておいてください。

今回の問題も(2)の結果を使って解いていくんだけど、これは簡単なのでほとんどの人が気づけるとは思いますが、問題によってはすぐに気づけないという問題もあります。

そんなときも、「前問の結果を使うのでは？」ということを入れておけばすぐに気づけるようになります。それでは、解答に進みます。この問題は、単に積分をするだけの問題です。

【(3)の解答】

(2)より、 $f(x) \geq g(x)$ であることを考え、求める図形の面積 $S(t)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_1^2 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_1^2 \{x(1 + \log x) - (2 + \log t)x + t\} dx \\ &= \int_1^2 \{x + x \log x - 2x - x \log t + t\} dx \\ &= \int_1^2 \{(-1 - \log t)x + x \log x + t\} dx \\ &= (-1 - \log t) \int_1^2 x dx + \int_1^2 x \log x dx + \int_1^2 t dx \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{array}{lll} \int_1^2 x dx & \int_1^2 x \log x dx & \int_1^2 t dx \\ = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 & = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \log x dx & = \left[tx \right]_1^2 \\ = 2 - \frac{1}{2} & = \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx & = t \\ = \frac{3}{2} & = 2 \log 2 - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^2 & \\ & = 2 \log 2 - \frac{3}{4} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} S(t) &= (-1 - \log t) \int_1^2 x dx + \int_1^2 x \log x dx + \int_1^2 t dx \\ &= (-1 - \log t) \cdot \frac{3}{2} + 2 \log 2 - \frac{3}{4} + t \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \log t + 2 \log 2 - \frac{3}{4} + t \\ &= t - \frac{3}{2} \log t + 2 \log 2 - \frac{9}{4} \quad \blacktriangleleft \text{これが答え} \end{aligned}$$

【(4)の解説】

この問題も「 $S(t)$ の最小となる」という表現から、最大値・最小値問題とみなすことができます。(2)でも解説しましたが最大値・最小値問題の基本はグラフをかくこと、そしてグラフをかくには微分をすることが必要。したがって、この問題も微分をして解いていきます。

【(5)の解答】

$$S(t) = t - \frac{3}{2} \log t + 2 \log 2 - \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} S'(t) &= 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} \\ &= \frac{2t-3}{2t} \end{aligned}$$

ここで、 $t > 0$ より $S'(t) = \frac{2t-3}{2t}$ の正負は $2t-3$ の正負と一致することを考え、増減表をかくと以下ようになる。

x	0		$\frac{3}{2}$	
$S'(t)$		-	0	+
$S(t)$		↘	$S\left(\frac{3}{2}\right)$	↗

増減表より、 $t = \frac{3}{2}$ のとき $S(t)$ は極小かつ最小となる。よって、 $S(t)$ が最小となる t の値は $t = \frac{3}{2}$

今回の問題はどうかだったでしょうか？難易度としては、ごくごく基本的なものですが、計算量が多いので20分以内で解くのは少し難しかったかもしれません。微分積分は、理系では最頻出の単元で計算量も多いです。理解することはもちろんのこと、問題演習を通して計算に慣れておく必要があります。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

メールはコチラまで (何か言ってくれと嬉しいです)
magdai@hmg-gen.com/