問題

$y=\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x+4}}$ と x 軸および２直線 $x=a,\ x=a+1$ によって囲まれる図形を考える。この図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする。a が実数全体を動くとき、$V(a)$ が最大値となる a を求めよ。

この問題は、北海道大学の過去問です。積分の問題です。理論的に考えられる人にとっては簡単な問題です。解答時間は５分とかからないという人もいると思います。

ただ、何も考えずに解いているとなかなかできません。数学全般に言えることですが「なぜ、この式変形をするのか」ということを常に考えながら解く癖をつけるようにしてください。

簡単なレベルの問題は、単に公式を覚えたり、解法を覚えるだけなので適当に解いていてもできるようになりますが、こういった受験問題は適当に解いていてはなかなかできるようになりません。常に「なぜこうする」ということを自問しながら解いていくようにしてください。

回答

まず、$y=\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x+4}}$ のグラフがどんな形になっているか知らないといけません。よく、面積や体積の問題で、何でもかんでも微分をしてグラフをかこうとする人がいますけど、それは必要ないですよ。

面積や体積は何も正確なグラフが必要という訳ではありません。グラフの上下関係さえ分かったら十分なんです。今回の問題も「x 軸のまわりに回転させる」と書いてあるので $y=\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x+4}}$ と x 軸の $a\leqq x\leqq a+1$ における上下関係さえ分かったら十分なんです。

で、$y=\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x+4}}$ を見てみると e^{x} や e^{-x+4} っていうのは正でしょ？すべてが正なんだから、当然 $y=\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x+4}}$ も正の範囲でしか動かないよね？常に正ということさえ分かったら、$V(a)=\displaystyle\int_{a}^{a+1}\pi y^{2}\,dx$ ということが分かります。後は、式変形をして解いていくだけなのでグラフはもう必要ありません。

と言っても $y=\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x+4}}$ がどんな形をしているかせめて大雑把な形でいいから知りた

いですよね？では、微分をせずに「雰囲気」でグラフをかいてみます。

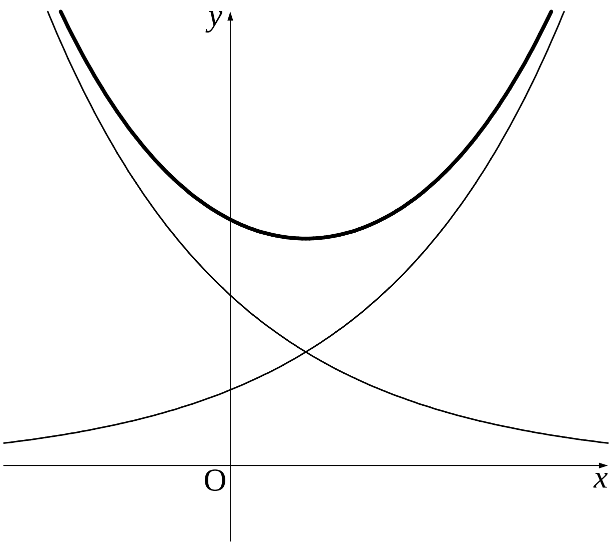
(注) この「雰囲気」でグラフをかくっていうのは本当に重要です。

今回のように何も書かれていないのなら、微分を使ってグラフを求める必要はありませんが、「グラフをかけ」という問題ではしっかりと微分をしてかかないといけません。

ただ、知っていると思いますが微分は計算が面倒なものが多いです。面倒なので当然計算間違いも増えます。ですが、最初にグラフがどんな形になるか分かれば、その微分の計算結果と矛盾ができるので、計算間違いにもすぐに気づけるようになります。

この微分をしないでグラフをかくというのは本当に重要なんですが、解説をしている人が意外なほど少ないです。ですが、積分の問題を解いていくうえで本当に重要なテクニックです。慣れてくると簡単ですので、しっかりと理解しておいてください。

それでは、「雰囲気」でグラフをかいていきます。$y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x+4}}$ ですが、いきなりすべては無理なのでとりあえず分母の $y = e^x + e^{-x+4}$ のグラフをかきたいと思います。



上記の太線が $y = e^x + e^{-x+4}$ のグラフで、細い線がそれぞれ $y = e^x$ と $y = e^{-x+4}$ です。こうなるっていうことは分かりますか？

本当に適当に考えるんですけど、$y = e^{-x+4}$ は x の値が大きくなるにつれてどんどん小さくなり、$x \to \infty$ では、$e^{-x+4} = 0$ となります。

ということは $y = e^x + e^{-x+4}$ のグラフは e^x に e^{-x+4} を加えたものなので x が大きくなるに

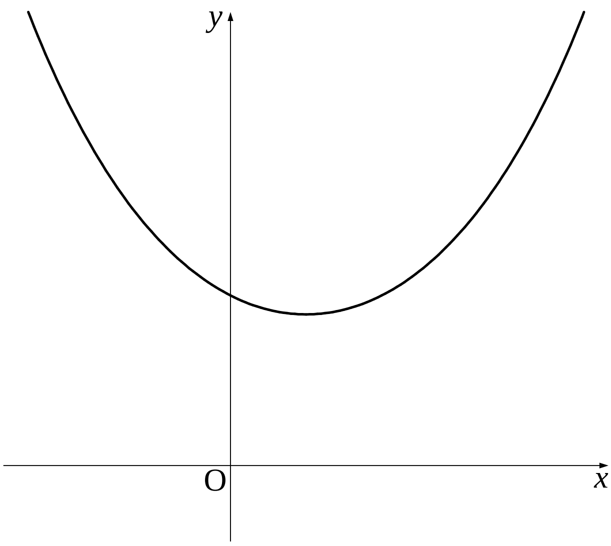
つれ、少しずつ $y = e^x$ のグラフに近づきます。だって、$y = e^x + e^{-x+4}$ は $y = e^x$ に $y = e^{-x+4}$ を加えたものなので、e^{-x+4} は x の値が大きくなれば少しずつ小さくなり 0 に近づくので、$y = e^x + e^{-x+4}$ も x の値が大きくなると少しずつ、$y = e^x$ のグラフに近づいていき、$x \to \infty$ では $y = e^x + e^{-x+4}$ のグラフはほとんど $y = e^x$ のグラフと一致します。

ただ、$y = e^{-x+4}$ はどんなに x の値が大きくなっても、わずかに 0 より大きいので、$y = e^x + e^{-x+4}$ は $y = e^x$ のグラフよりわずかに上側にきます。

$x \to -\infty$ の方向も同じように考えることができます。今度は $y = e^x$ がどんどん 0 に近づくので、$x \to -\infty$ では $y = e^x + e^{-x+4}$ のグラフはほとんど $y = e^{-x+4}$ のグラフと一致します。

たまに、この適当にグラフをかく方法を理解できない人がいますけど、それほどまじめに考えなくていいです。本当に適当にかいているだけですから、だいたいこんな感じだなというだけで十分です

ここまでで、$y = e^x + e^{-x+4}$ のグラフをかくことができました。

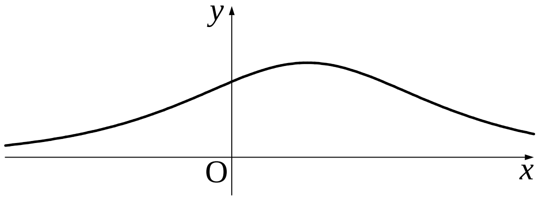


で、ここから $y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x+4}}$ のグラフをかきたいんですけど、まず $x \to \pm\infty$ を考えると $y = e^x + e^{-x+4}$ のグラフは $x \to \pm\infty$ で $+\infty$ となります。分母が $+\infty$ となるので、$y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x+4}}$ は $x \to \pm\infty$ では 0 に近づきます。

また、分数関数で分子が定数で分母が正の値の範囲で動くとき、分母が最小となるとき、

分数全体からみれば最大となります (当然、分母が最大のとき分数全体をみると最小となります)。

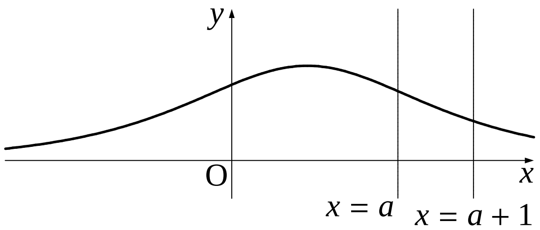
$y = e^x + e^{-x+4}$ は常に正の値です。分子は 1 で定数です。ですから、分母が最小となるとき、分数全体をみれば最大となるので $y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x+4}}$ は以下のようになります。



⇑ $x \to \pm\infty$ では 0 に近づき、分母の $y = e^x + e^{-x+4}$ が最小となるところで、最大となる。後は、なめらかに線を結ぶだけ！

この、適当にグラフをかくという方法は、理解できる人はすんなりと理解できるのですが、なかなか理解できないという人もいます。それほど、難しいことをしている訳ではありません。本当に重要なので、しっかりと理解しておいてください。

グラフをかけたので、問題に戻ります。問題は $y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x+4}}$ と $x = a,\ x = a + 1$ に囲まれた部分を x 軸に回転させたときの体積です。これを図示すると、次のようになります。



$$
\begin{aligned}
V(a) &= \int_a^{a+1} \pi y^2 \, dx \\
&= \pi \int_a^{a+1} \left(\frac{1}{e^x + e^{-x+4}} \right)^2 dx
\end{aligned}
$$

で、ここからどうしようかな？と思うんだけど、ここで $\pi \displaystyle\int_a^{a+1} \left(\frac{1}{e^x + e^{-x+4}} \right)^2 dx$ を計算するのかな？って考えると思うけど、少し面倒だよね…

(注) 数学において面倒だなと感じることは重要です。というのも、受験ではあまりに面倒な問題が出題されることはないからです。面倒すぎる場合、何か他に解き方が存在することが多いです。面倒だなと感じたら何か別の方法がないか考えるようにしておいて

ください。

で、もう一度問題を見てみると。「$V(a)$ が最大値となる a を求めよ」という表現があります。この表現を見てピンと来てほしいのですけど、「$V(a)$ が最大値となる a を求めよ」であって、最大値を求めよとは書いていないよね？ということは、この問題は最大値を求めることは不要！

さらに言えば、「**最大値を求めることができないから、最大値を求めよ**」とは書いていないと読みとることができます。

「最大値が求められるときでも、こういうふうに最大値を求めよって書かれていない問題を見たことがありますよ」と言われたことがあります。確かにそういった問題もあります。

ただ、私は「可能性」の話をしています。「可能性が高い」であって「確実に」ということではありません。数学全般的に言えることなんですが、問題を解く前にうまくいくという根拠はありません。とりあえず、うまくいきそうな解法で解いているにすぎません。とにかく「可能性のある」あるいは「可能性の高そうな」手法で解いていっているだけです。ですから、もちろん例外もあります。

このあたりは頭を柔軟にしておくようにしてください。

それから覚えておいてほしいことは、みんなもこれまで多くの積分計算をしてきたと思いますけど、一般的に高校数学の範囲で積分ができるのはごくごく限られた関数だけなんです。定積分が出てきたときは何が何でも解こうとする人もいますが、それって無理なことも多いです。積分ができない定積分をどんなにがんばっても積分はできないですよね？

そういったときは、積分の計算ができなくても解ける手法があるはずです。意外に知らない人が多いので書かせてもらいました。それでは、問題に戻ります。

$V(a) = \pi \displaystyle\int_a^{a+1} \left(\frac{1}{e^x + e^{-x+4}} \right)^2 dx$ です。最大となる a を求めよという問題なんだから、別に積分が解けなくても求められるんじゃない？

最大値、最小値を求めるときは当然微分だよね？積分を含んだ微分で以下のような公式があります。知らない人が意外に多いですが、受験では頻出です。しっかりと覚えておいてください。

微分の公式

$$\frac{d}{dx}\int_{f(x)}^{h(x)} g(t)\,dt = h'(x)g\left(h(x)\right) - f'(x)g\left(f(x)\right)$$

で、この公式を使って $V(a) = \pi\displaystyle\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{e^x + e^{-x+4}}\right)^2 dx$ を a で微分します。

$$V(a) = \pi\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{e^x + e^{-x+4}}\right)^2 dx$$

$$V'(a) = \pi\left\{(a+1)'\left(\frac{1}{e^{a+1} + e^{-(a+1)+4}}\right)^2 - a'\left(\frac{1}{e^a + e^{-a+4}}\right)^2\right\}$$ ◀ 先ほどの微分の公式より

$$= \pi\left\{\left(\frac{1}{e^{a+1} + e^{-a+3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{e^a + e^{-a+4}}\right)^2\right\}$$

とりあえず、ここまできました。で、ここからなんですがよくやってしまいがちの手法が $\left(\dfrac{1}{e^{a+1} + e^{-a+3}}\right)^2$ などを展開してしまうことです。まあ、気持ちは分からないことないのですが、ここからはなぜ微分をしたのかという微分する目的をしっかりと頭の中に叩き込んでいないといけません。

微分は、正負さえ知ることができたらそれで十分です。で、正負を知るためには因数分解をして積の形にすることが便利です。このことと同時に( )^2−( )^2 は $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ の公式を使うことができます。

「微分は正負を知ることが目的、そして正負を知るには因数分解をしたら分かりやすい」「( )^2 − ( )^2 は $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ の形を利用することが多い (← 微分に限らず他の単元でも言えることです)」といった理由から、$\pi\left\{\left(\dfrac{1}{e^{a+1} + e^{-a+3}}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{e^a + e^{-a+4}}\right)^2\right\}$ を因数分解していきます。

$$\pi\left\{\left(\frac{1}{e^{a+1} + e^{-a+3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{e^a + e^{-a+4}}\right)^2\right\}$$
$$=\pi\left(\frac{1}{e^{a+1} + e^{-a+3}} + \frac{1}{e^a + e^{-a+4}}\right)\left(\frac{1}{e^{a+1} + e^{-a+3}} - \frac{1}{e^a + e^{-a+4}}\right)$$

とりあえずここまで式変形をできました。ここからなんですけど、どうするかよく分からないという人もいますが、ここでもう一度「**微分は正負を知るだけで十分**」ということを思い出してください。

で、このことを頭に入れて、$\pi\left(\frac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}+\frac{1}{e^{a}+e^{-a+4}}\right)\left(\frac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}-\frac{1}{e^{a}+e^{-a+4}}\right)$を見てみると左側の$\pi\left(\frac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}+\frac{1}{e^{a}+e^{-a+4}}\right)$はすべての項が正で足し算なんだから当然正だよね？ということは、$\pi\left(\frac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}+\frac{1}{e^{a}+e^{-a+4}}\right)\left(\frac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}-\frac{1}{e^{a}+e^{-a+4}}\right)$の正負は右側の$\left(\frac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}-\frac{1}{e^{a}+e^{-a+4}}\right)$の正負と一致します。

これで微分のときは、因数分解をすることが多いという理由が分かったと思います。後は、$\left(\frac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}-\frac{1}{e^{a}+e^{-a+4}}\right)$を考えていくだけです。ここからは、通分をして計算をするくらいしかありません。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}-\frac{1}{e^{a}+e^{-a+4}}\\
&=\frac{e^{a}+e^{-a+4}}{(e^{a+1}+e^{-a+3})(e^{a}+e^{-a+4})}+\frac{e^{a+1}+e^{-a+3}}{(e^{a+1}+e^{-a+3})(e^{a}+e^{-a+4})} \quad \blacktriangleleft \text{通分をした}\\
&=\frac{e^{a}+e^{-a+4}-e^{a+1}-e^{-a+3}}{(e^{a+1}+e^{-a+3})(e^{a}+e^{-a+4})}
\end{aligned}
$$

で、ここからなんですけど分母の$(e^{a+1}+e^{-a+3})(e^{a}+e^{-a+4})$はすべての項が正なので、当然$(e^{a+1}+e^{-a+3})(e^{a}+e^{-a+4})$全体も正です。と言うことは$\frac{e^{a}+e^{-a+4}-e^{a+1}-e^{-a+3}}{(e^{a+1}+e^{-a+3})(e^{a}+e^{-a+4})}$の正負は分子の$e^{a}+e^{-a+4}-e^{a+1}-e^{-a+3}$の正負と一致します。

何度も言いますが、「微分は正負を知ることだけが目的」ということを頭に入れておいてください。これまでしてきたように正負に影響をしないものはどんどん外していき、正負に影響するものだけを考えていきます。

で、ここから$e^{a}+e^{-a+4}-e^{a+1}-e^{-a+3}$の正負を考えていったらいいんだけどどうしようかな？なかなか分からないよね？でも、正負を知るにはいろいろなやり方があるけどこの場合因数分解ができます。さっきも微分では因数分解をすることが多いと言いました。そのことを、頭の片隅に入れておけば「あれ？因数分解できるのでは？」と感じられるようになります。

$e^a + e^{-a+4} - e^{a+1} - e^{-a+3}$

$=(e^a - e^{a+1}) - (e^{-a+3} - e^{-a+4})$

$=e^a(1-e) - e^{-a+3}(1-e)$ ◀ 共通因数 $(1-e)$ ができた。これで因数分解できる！

$=(1-e)(e^a - e^{-a+3})$

上記のように因数分解することができました。この因数分解なんですけど「なかなか気づけません。どうしたら気づけますか？」と言う人がいます。まあ、「慣れてね」としか言いようがないんですけど、「微分は因数分解をすることが多い」「$e^a + e^{-a+4} - e^{a+1} - e^{-a+3}$ は似ているものが多いので、うまい具合にペアを見つければ共通因数ができるかも」ということを手掛かりにすれば気づけるようになると思います。

考え方としては、上記のとおりですが気づけるようになるには演習を繰り返すしかないと思います。それでは、解答に戻ります。

$(1-e)(e^a - e^{-a+3})$ となりました。$1-e < 0$ ($e \fallingdotseq 2.71$ より) です。後は $e^a - e^{-a+3}$ 正負を調べたらいいんですけど、今回は別に大したことはないですが微分で正負を知るには (微分したもの) $= f(x) - g(x)$ という形に強引に式変形をします。そうすると、$f(x)$ と $g(x)$ の大小関係で微分の正負を知ることができます。$f(x)$ の方が $g(x)$ より大きいときは $f(x) > g(x)$ となるので $f(x) - g(x) > 0$ です。反対のときも当然成立します。

で、今回ですが $e^a - e^{-a+3}$ なんですけど、先ほどの考えにあてはめると e^a と e^{-a+3} の大小関係が分かればいいです。で、$y = e^x$ は単調増加です。と言うことは e^x の x の部分が大きいほど e^x 全体としても大きくなります。

ですから e^a と e^{-a+3} の大小関係は a と $-a+3$ の大小関係と一致します。もうここまできたら簡単だよね？$a > -a+3$ を解くと $a > \frac{3}{2}$ となり、$a < -a+3$ を解くと $a < \frac{3}{2}$ となります。このことより、$e^a - e^{-a+3}$ の正負は $a > \frac{3}{2}$ で正となり、$a < \frac{3}{2}$ で負となります。

後は $1-e < 0$ ということをあわせると $(1-e)(e^a - e^{-a+3})$ は $a > \frac{3}{2}$ で負となり、$a < \frac{3}{2}$ で正となります。

少し長かったですがこれで $V'(a)$ の正負を知ることができました。これをもとに増減表を書くと以下のようになります。

a		$\frac{3}{2}$	
$V'(a)$	$+$	0	$-$
$V(a)$	$\nearrow$	$V\left(\frac{3}{2}\right)$	$\searrow$

増減表より、$a=\dfrac{3}{2}$ のとき最大となります。これで、終了です。それでは、解答を書いておきます。

【解答】

$y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x+4}}$ は常に $y\geqq 0$ となる。このことより求める体積 $V(a)$ は $V(a)=\displaystyle\int_a^{a+1}\pi y^2\,dx$ となる。

$$V(a)=\pi\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{e^x+e^{-x+4}}\right)^2 dx$$

$$V'(a)=\pi\left\{(a+1)'\left(\frac{1}{e^{a+1}+e^{-(a+1)+4}}\right)^2-a'\left(\frac{1}{e^a+e^{-a+4}}\right)^2\right\}$$

$$=\pi\left\{\left(\frac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}\right)^2-\left(\frac{1}{e^a+e^{-a+4}}\right)^2\right\}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}+\frac{1}{e^a+e^{-a+4}}\right)\left(\frac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}-\frac{1}{e^a+e^{-a+4}}\right)$$

ここで $V'(a)=\pi\left(\dfrac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}+\dfrac{1}{e^a+e^{-a+4}}\right)\left(\dfrac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}-\dfrac{1}{e^a+e^{-a+4}}\right)$ の正負は $\dfrac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}-\dfrac{1}{e^a+e^{-a+4}}$ の正負と一致するので、

以下 $\dfrac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}-\dfrac{1}{e^a+e^{-a+4}}$ の正負を考える。

$$\frac{1}{e^{a+1}+e^{-a+3}}-\frac{1}{e^a+e^{-a+4}}$$

$$=\frac{e^a+e^{-a+4}}{(e^{a+1}+e^{-a+3})(e^a+e^{-a+4})}+\frac{e^{a+1}+e^{-a+3}}{(e^{a+1}+e^{-a+3})(e^a+e^{-a+4})}$$

$$=\frac{e^a+e^{-a+4}-e^{a+1}-e^{-a+3}}{(e^{a+1}+e^{-a+3})(e^a+e^{-a+4})}$$

$\dfrac{e^a + e^{-a+4} - e^{a+1} - e^{-a+3}}{(e^{a+1} + e^{-a+3})(e^a + e^{-a+4})}$ は $e^a + e^{-a+4} - e^{a+1} - e^{-a+3}$ の正負と一致する。

$$
\begin{aligned}
& e^a + e^{-a+4} - e^{a+1} - e^{-a+3} \\
=& (e^a - e^{a+1}) - (e^{-a+3}) - e^{-a+4}) \\
=& e^a(1-e) - e^{-a+3}(1-e) \\
=& (1-e)(e^a - e^{-a+3})
\end{aligned}
$$

$e^a - e^{-a+3}$ は $a < \dfrac{3}{2}$ で $e^a - e^{-a+3} < 0$、$a > \dfrac{3}{2}$ で $e^a - e^{-a+3} > 0$ となることと、$1 - e < 0$ を考え増減表を書くと次のようになる。

a		$\frac{3}{2}$	
$V'(a)$	$+$	0	$-$
$V(a)$	$\nearrow$	$V\left(\frac{3}{2}\right)$	$\searrow$

増減表より、$a = \dfrac{3}{2}$ のときに最大となる。

今回の問題はどうだったでしょうか？説明をかなり詳しく書きました。分かっている人にとっては少しまわりくどい説明だったかもしれませんが、あまり数学が得意でない人は、「なぜこのように式変形をするのか」ということをかなり納得してもらえたと思います。

今回の問題は、北海道大学の過去問で難しかったと思いますが丁寧に考えていくと理解できないという問題ではなかったと思います。今回はかなり強調しましたが、普段から「なぜここでこの式変形をするのか？」ということを常に自問しながら問題を解くようにしておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

メールはコチラまで (何か言ってくれると嬉しいです)
magdai@hmg-gen.com/