問題

xyz 空間内の点 $P(1, 0, 1)$ と、xy 平面上の円 C ： $x^2 + (y-2)^2 = 1$ に属する点 $Q(\cos\theta, 2+\sin\theta, 0)$ を考える。

(1) 直線 PQ と平面 $z = t$ の交点の座標を (α, β, t) とするとき、$\alpha^2 + \beta^2$ を t と θ で表せ

(2) 線分 PQ を z 軸のまわりに１回転させてできる曲面と平面 $z = 0$, $z = 1$ によって囲まれる立体の体積を θ で表せ

(3) Q が C 上を一周するとき、(2) で求めた体積の最大値、最小値を求めよ

この問題は、２００８年の筑波大学の過去問で、空間図形の回転体の体積に関する問題です。

空間図形と言えば、難しく感じる人もいますがやっている内容は平面図形と一緒ですので、それほど難しくありません。

問題を見たところ難しく感じるかもしれませんが、この問題は入試問題としては基本的な問題で計算量も少ないです。筑波大学の問題ですが、筑波志望なら確実に解けないといけない問題です。

解説

こういった空間図形の回転体の問題で、問題をみるとすぐにどういった図形かかこうとする人がいます。かくことができたら、それでいいのですがほとんどの場合回転体の図形は、どういった形かということは複雑すぎて分からない問題が多いです。

さらに、立体の形が分からなくても体積自体は求めることができます。ですから、体積を求める問題でも、立体がどういった形をしているのか考える必要はありません。(簡単にかけるときはかいてもらった方がいいかもしれませんが、少し考えてみてかけそうになければ無視してもらっていいです。)

積分と言うのは微小区間を足し合わせることです。体積を求めるには、微小区間の体積を求め、それらを足し合わせることによって全体の体積を求めます。

微小区間の体積ですが、体積は $S(t)\,dt$ で求めることができます。$S(t)$ というのは切り口の面積、dt は高さです。

後は、これを足し合わせて全体の面積を求めるのですが、足し合わせるという作業が積分をするということです。ですから、求める体積 V は、微小区間の体積 $S(t)\,dt$ を積分す

ることによって体積を求めることができます。式で書くと $V = \int S(t)\,dt$ です。

このあたりのことが分からないという人は、http://www.hmg-gen.com/kaitou2-12.pdf を見てください。積分の意味を話しています。

これらのことを踏まえて、問題を解いていきます。

【(1) の解説】
いろいろな解き方がありますが、ベクトルを使うのが一番はやいと思います。この問題に限らず、座標がらみの問題はベクトルで解くのが楽なことが多いですよ。座標の問題が出てきたら、「ベクトルを使うのかな？」と思えるようにしておいてください。

また、空間ベクトルになると難しいという人がいます。確かに空間ベクトルになると計算自体は 3 次元なので難しくなりますが、やること自体は平面ベクトルと同じなのでそれほど難しくないですよ。

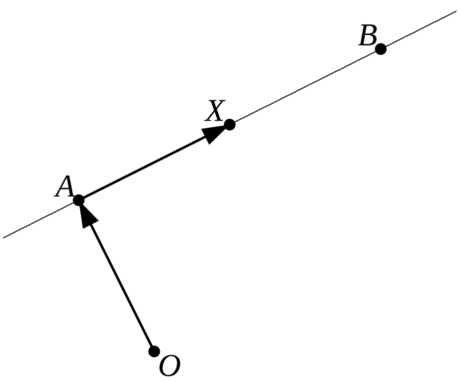
まずは、以下のベクトル方程式を覚えてください。ベクトル方程式ときくと、難しいと感じる人が多くいますが、ごくごく簡単ですよ。

ベクトル方程式

直線 AB 上の任意点 X は、次のように表される。

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

上記ですが、暗記している人もいますが図形を使えば、わざわざ暗記する必要はないので図形で理解するようにしてください。



図より、

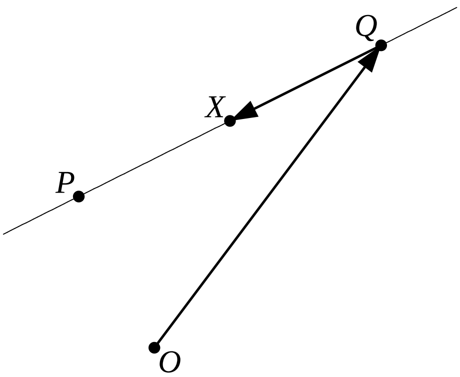
$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AX}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ◀ $\overrightarrow{\mathrm{AX}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を何倍かしたら $\overrightarrow{\mathrm{AX}}$ になるよね？

この図を見てもらえば分かるけど、$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ でも成り立つよね？問題を解くときは、どっちでやった方が計算量が少なくなるかその都度考えながら解いてもらったらいいと思います。

(1) は単にこの性質を使うだけの問題です。文字が含まれていて少し計算が面倒ですが、その点さえ気をつけたらごくごく簡単な問題だと思います。それでは、解答に進みます。

【(1) の解答】



直線 PQ 上の任意点を X とすると、k を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + k\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ をあらわすことができる

別に $\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ でもよいが、今回の問題では $\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + k\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の方が計算がラクになります。

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OX}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + k\overrightarrow{\mathrm{QP}} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 2+\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1-\cos\theta \\ -2-\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta + k(1-\cos\theta) \\ 2+\sin\theta + k(-2-\sin\theta) \\ k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで直線 PQ と平面 $z = t$ の交点の座標を R とする。R の z 座標は t となることより $k = t$ のときとなる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \begin{pmatrix} \cos\theta + t(1-\cos\theta) \\ 2+\sin\theta + t(-2-\sin\theta) \\ t \end{pmatrix}$$

R の x 座標が α、y 座標が β なので、$\alpha = \cos\theta + t(1-\cos\theta)$, $\beta = 2+\sin\theta + t(-2-\sin\theta)$ となる。

$$\alpha^2 + \beta^2$$
$$=\left\{\cos\theta + t(1-\cos\theta)\right\}^2 + \left\{(2+\sin\theta) - t(2+\sin\theta)\right\}^2$$
$$=\cos^2\theta + 2t\cos\theta(1-\cos\theta) + t^2(1-\cos\theta)^2 + (2+\sin\theta)^2(1-t)^2$$
$$=\cos^2\theta + 2t\cos\theta(1-\cos\theta) + t^2(1-\cos\theta)^2 + (\sin^2\theta + 4\sin\theta + 4)(t^2 - 2t + 1)$$
$$=\cos^2\theta + 2(\cos\theta - \cos^2\theta)\,t + (\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1)\,t^2$$
$$+ (\sin^2\theta + 4sin\theta + 4)\,t^2 + (-2\sin^2\theta - 8\sin\theta - 8)\,t + \sin^2\theta + 4\sin\theta + 4$$
$$=(\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + \sin^2\theta + 4\sin\theta + 4)\,t^2$$
$$+ (2\cos\theta - 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta - 8\sin\theta - 8)\,t + \sin^2\theta + \cos^2\theta + 4\sin\theta + 4$$

⇑ 見やすいように t について整理しながら計算をした

$$=(6 + 4\sin\theta - 2\cos\theta)\,t^2 + (2\cos\theta - 8\sin\theta - 10)\,t + 1 + 4\sin\theta + 4$$ ◀ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を使った

$$=2(3 + 2\sin\theta - \cos\theta)\,t^2 + 2(\cos\theta - 4\sin\theta - 5)\,t + 5 + 4\sin\theta$$ ◀ これが答え

【(2) の解説】

この問題は、一見難しそうに感じるかもしれませんが簡単です。体積はある切断面の面積を求め、それを定面とする柱状の立体図形 (円柱や三角柱など) を足し合わせることにより全体の体積を求めていきます。

柱状の立体図形の高さは dt でとることが多いです。柱状の立体図形の体積は、(底面積)×(高さ) で求めることができます。高さが分かっているので、あとは定面積を求めることさえできたら体積を求めることができます。

今回の問題は z 軸回転なので、z 軸に垂直な平面での切り口を考えます。$z = t$ での切り口の図形は z 軸回転なので、円になります。

円の面積は πr^2 で求めることができますが、r は当然点 (1) で求めた R から z 軸までの距離です。

$R(\alpha, \beta, t)$ より、円の半径 r は $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ となります。これで、$z = t$ の切り口の面積 $S(t)$ は $S(t) = \pi r^2 = \pi(\alpha^2 + \beta^2)$ になります。また、微小区間の円柱の体積の高さは dt です。

これより微小区間の体積 dV は $dV = S(t)\,dt$ です。後は、これを全部足し合わせたら全体の体積が求めるので、求める体積 V は $\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt$ で求めることができます。

【(2) の解答】
求める立体の体積を V とする。

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi(\alpha^2+\beta^2)\,dt \\
&= \pi\int_0^1 \left\{2(3+2\sin\theta-\cos\theta)\,t^2+2(\cos\theta-4\sin\theta-5)\,t+5+4\sin\theta\right\}dt \\
&= \pi\left[\frac{2}{3}(3+2\sin\theta-\cos\theta)t^3+(\cos\theta-4\sin\theta-5)\,t^2+(5+4\sin\theta)\,t\right]_0^1 \\
&= \pi\left\{\frac{2}{3}(3+2\sin\theta-\cos\theta)+\cos\theta-4\sin\theta-5+5+4\sin\theta\right\} \\
&= \frac{\pi}{3}(4\sin\theta+\cos\theta+6)
\end{aligned}
$$
◀ これが答え

【(3) の解説】
これは、ごくごく簡単な問題です。最大値、最小値問題だから微分をするのかな？と思うかもしれません。もちろん微分をしてもらってもできないことはないですが、微分をしないでも単に三角関数の合成を使うだけで求めることができます。

【(3) の解答】

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\pi}{3}(4\sin\theta+\cos\theta+6) \\
&= \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{17}\sin(\theta+\alpha)+6\right)
\end{aligned}
$$

ただし、$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{17}},\ \cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$ をみたす

$-1 \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$ を考え、V の最大値は $\dfrac{6+\sqrt{17}}{3}\pi$、最小値は $\dfrac{6-\sqrt{17}}{3}\pi$ となる。

これで、今回の問題は終わりです。どうだったでしょうか？空間図形に慣れていない人は難しかったかもしれません。

体積は、$V = \displaystyle\int S(t)\,dt$ で求められることが多いです。と言うことは、要するに $S(t)$ さえ分かれば求めることができます。$S(t)$ とは、もちろん切り口の面積です。このあたりは

おろそかにしている人が多いです。受験でも頻出という訳ではありませんが、たまに出題されます。しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

メールはコチラまで (何か言ってくれると嬉しいです)
magdai@hmg-gen.com/