問題

以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を示せ

(2) $2\cos 80°$ は３次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ

(3) $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80°)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ となる角度 α, β を求めよ。ただし、$0° < \alpha < \beta < 180°$ とする。

2009 年の筑波大学の過去問です。三角関数と高次方程式の融合問題です。学校では単元別に勉強をすることが多いですが、実際の受験では複数の単元の融合問題も多く出題されます。しっかりと理解しておいてください。

今回の問題は、**受験問題は、前問の結果をヒントにして解く**という重要な考えて身についているかどうかで解けるかどうかが決まる、という問題です。

意外に知らない人が多いですが、**受験問題で** $(1), (2), \cdots$ **となっていれば、それ以降の問題は前問をヒントにしたり、前問の結果を利用したりして解いていくことが多い**です。この考えは本当に重要なので、しっかりと理解しておいてください。それでは、解説、解答に進みます。

【(1) の解説】

これは、単に加法定理から３倍角の公式を導く問題です。３倍角はよく出てくるので暗記しておいてください。今回もそうですが、３倍角の公式を導けという問題は比較的よく出題されます。

公式の結果と同時に、自分で導けるようになっておいてください。また、３倍角には有名なゴロ合わせがあります。http://www.hmg-gen.com/a-mondai22.pdf に載せてあるので、見たい人はこちらのページを見てください。

【(1) の解答】

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \cos 3\theta \\
&= \cos(\theta + 2\theta) \\
&= \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta \quad \blacktriangleleft\ \text{加法定理より} \\
&= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \sin\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta \quad \blacktriangleleft\ \text{2 倍角の公式より} \\
&= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - 2\sin^2\theta\cos\theta \\
&= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^2\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = (\text{右辺})_{//}
\end{aligned}
$$

【(2) の解説】

$2\cos 80°$ が 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示すには、$x = 2\cos 80°$ を $x^3 - 3x + 1 = 0$ に代入したとき、この方程式が成立すれば解となります。

で、この問題は先ほど解説をした、**前問の結果を使って解いていく**という知識を使います。受験問題だからといって必ずしも、前問の結果を使う訳ではありませんが、今回は (1) を解いている時点で、ああこの 3 倍角の公式を (2) 以降で利用するんだな、と思えるようになって欲しいです。

と言うのも、「3 倍角の公式」なんて受験生だとほとんど誰でも導くことができます。それなのに「(1) とわざわざ設問を使って出題された」ということは (2) 以降でこの知識が必要になりますよ、ということです。

このように受験問題では、**あまりに簡単なものが出題されたときは、まず間違いなくそれ以降の問題でその結果を使って問題を解いていきます**。それでは、解答に進みます。

【(2) の解答】

$(2\cos 80°)^3 - 3 \cdot 2\cos 80° + 1$

$= 8\cos^3 80° - 6\cos 80° + 1$

ここまでは誰でもできると思います。ここからどうしようかな?と考えるんですけど、ここで「あっ、(1) の結果を使うんだな」と思えるようになってください。

$=2\,(4\cos^3 80^\circ - 3\cos 80^\circ) + 1$

$=2\ \cos(3\cdot 80^\circ) + 1$ ◀ (1) より、$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta$ に $\theta = 80^\circ$ を代入した！

$=2\cos 240^\circ + 1$

$=2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1$ ◀ $\cos 240^\circ = -\dfrac{1}{2}$ より

$= -1 + 1$

$=0$

以上より、$2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解である。

【(3) の解説】
この問題は有名なので解き方を知っている人もいるとは思いますが、初見の人は (3) は少し難しいかもしれません。

どういうふうに解いていくのかな？と $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解が $2\cos 80^\circ, 2\cos\alpha, 2\cos\beta$ となることを考え解と係数の関係を使って解いていくのかな？と思う人もいるかもしれません。

実際、この解き方も考え方としては無理のないものだと思いますが、その解き方ではうまくいきません。実際、自分でやってみれば分かると思うけど、この方法ではどうしても計算ができません

で、どういうふうに考えるのかと言いますと、実はこの問題は (2) をヒントにして解いていきます。それでは、問題を解いていきます。

$x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos\beta)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ となるとき、$x^3 - 3x + 1 = 0$ の 3 解が $x = 2\cos 80^\circ, 2\cos\alpha, 2\cos\beta$ となればＯＫです。

で、この問題の解き方ですが (2) と同じように解いていきます。今回の場合、$2\cos\alpha, 2\cos\beta$ と両方とも $2\cos$ の形をしているので、$2\cos\theta$ が解となるとして解いていきます。見やすいように $f(x) = x^3 - 3x + 1$ として

$$\begin{aligned} f(2\cos\theta) &= (2\cos\theta)^3 - 3\cdot 2\cos\theta + 1 \\ &= 8\cos^3\theta - 6\cos\theta + 1 \\ &= 2\,(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + 1 \\ &= 2\cos 3\theta + 1 \end{aligned}$$

$f(2\cos\theta)=0$ のとき、$2\cos 3\theta+1=0$ となればＯＫです。$0<\theta<180°$ で、$2\cos 3\theta+1=0$ を解くと $\theta=40°, 80°, 160°$ となります。これで $\alpha=40°, \beta=160°$ ということが見えてきたよね？

それでは、解答に進みます。

【解答】
$f(x)=x^3-3x+1$ とする。

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$ より、$f(x)$ は $x=-1$ のとき極大となり、$x=1$ のとき極小となる。

$f(-1)=-1+3+1=3>0,\ f(1)=1-3+1=-1<0$ より、$f(x)=0$ は３つの異なる実数解をもつ。
$\Uparrow x^3-3x+1=0$ が異なる３つの実数解をもつことを示した。３次関数で極大値が正で極小値が負だったら当然 x 軸との交点は３つできるよね？だから $f(x)=0$ の解の個数も３つです。

$$\begin{aligned}f(2\cos\theta)&=(2\cos\theta)^3-3\cdot 2\cos\theta+1\\&=8\cos^3\theta-6\cos\theta+1\\&=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+1\\&=2\cos 3\theta+1\end{aligned}$$

より、$x=2\cos\theta\,(0°<\theta<180°)$ が $f(x)=0$ の解となるのは $2\cos 3\theta+1=0$ つまり $\cos 3\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき、

$0°<\theta<180°$ より、$0°<3\theta<540°$ を考え $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ となるのは $3\theta=120°, 240°, 480°$ つまり $\theta=40°, 80°, 160°$ となる。

以上より、$f(x)=0$ の３解は $x=2\cos 40°, 2\cos 80°, 2\cos 160°$ となるので、
$f(x)=x^3-3x+1=(x-2\cos 40°)(x-2\cos 80°)(x-2\cos 160°)$ となる。

$0°<\alpha<\beta<180°$ より、$\alpha=40°, \beta=160°$ となる。

今回の問題はどうだったでしょうか？有名な問題なのでひょっとしたら解いてことのあるという人も多かったと思います。今回話したかったことは、「**受験問題では、前問の結果を使って問題を解くことが多い**」ということです。この考えは本当に重要ですので、しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com