

問題

n 人 ($n \geq 2$) で 1 回だけジャンケンをする。勝者の数を X として

- (1) k を $1 \leq k \leq n$ である整数とすると、 ${}_nC_k = {}_{n-1}C_{k-1}$ を示せ
- (2) $X = k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) である確率を求めよ
- (3) $X = 0$ 、すなわち勝負が決まらない確率を求めよ
- (4) X の期待値を求めよ

新潟大学の過去問です。確率の問題ですが、確率というよりはシグマの計算 (2 項定理) を使えるかどうかポイントとなります。

$C + C + \dots + C$ というふうに、コンビネーションの足し算がきたらまず間違いなく 2 項定理を使うんだな、というのを気づけるようになっておいてください。

【(1) の解説】

これは、本当によく出てくる証明方です。受験生なら解けないといけません。

意外に知らない人もいますが、 ${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ということは覚えておいてください。

【(1) の解答】

${}_nC_k = {}_{n-1}C_{k-1}$ を示す。

$$(\text{左辺}) = {}_nC_k$$

$$\begin{aligned} &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= k \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} \quad \leftarrow n! = n \cdot (n-1)!, k! = k \cdot (k-1)! \text{ より} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1)!} \\ &= {}_{n-1}C_{k-1} = (\text{右辺}) // \end{aligned}$$

【(2) の解説】

問題を見た感じ、難しく感じるかもしれませんがいたって簡単ですよ。 k 人が勝つ場合、 k 人がジャンケンに勝つには、グーで勝つ、チョキで勝つ、パーで勝つの 3 通りです。

そして、 k 人の選び方は ${}_nC_k$ 通り存在するので、 k 人が勝つ場合の数は ${}_nC_k \cdot 3$ です。

【(2) の解答】

n 人がジャンケンをして k 人が勝つ場合の数は、 ${}_nC_k \cdot 3$ なので、

求める確率は $\frac{{}_nC_k \cdot 3}{3^n} = {}_nC_k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ となる。

【(3) の解説】

勝者が 0 人、つまり n 人でジャンケンをしたときにアイコになる確率を求めたらいいのですが、直接アイコとなる確率を求めるのはかなり面倒です。

場合の数や確率の問題で直接求めるには、あまりにも面倒だなというときは余事象を考えるようにしてください。

今回の問題でも、(全体)=(少なくとも 1 人が勝つ)+(アイコ)です。

少なくとも 1 人が勝つとは、(1 人が勝つ) または (2 人が勝つ) または … または ($k-1$ 人が勝つ) 当たり前ですけど、 k 人でジャンケンをしたとき k 人が勝つことはありません。最高で $k-1$ 人までです。場合です。これらの確率は (2) の答えにシグマをとると簡単に求めることができます。

なお、上記のシグマの計算をするには 2 項定理を使って求めるということに気づかないといけません。それほど頻出という訳ではありませんが、たまに見る式変形なのでしっかりと理解しておいてください。

冒頭にも話しましたが $C + C + \dots + C$ と組み合わせの足し算が出てきたら「2 項定理を使うんだな」とすぐに気づけるようにしておいてください。

今回は、 $\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k$ の計算をしないといけませんが、分かりにくいと思うので解説しておきます。大丈夫だとは思いますが、一応 2 項定理を書いておきます。

2 項定理

$$(a + b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + \dots + {}_nC_{n-1} a^1 b^{n-1} + {}_nC_n a^0 b^n$$

$C + C + \dots + C$ のときは、2 項定理を使うといいましたが 2 項定理でよく出てくるのが $a = 1, b = 1$ のときです。上記の 2 項定理の公式に $a = 1, b = 1$ を代入すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (1 + 1)^n \\ &= 2^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= {}_nC_0 1^n 1^0 + {}_nC_1 1^{n-1} 1^1 + \cdots + {}_nC_{n-1} 1^1 1^{n-1} + {}_nC_n 1^0 1^n \\ &= {}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n\end{aligned}$$

上記より、 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = 2^n$ となります。これはよく出てくるので覚えておいてください。あと、この問題では使いませんが、 $a = 1, b = -1$ のときもよく出てきます。これも覚えておいてください。

では、問題に戻ります。今回は、 $\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k$ の計算をしないといけないんですけど、よく分からないのでシグマの中身を書き出します。(シグマの中身を書き出すといいました。こういうふうにシグマの計算でどう計算をしていいか分からないときは具体的に書き出して考えることが多いです。覚えておいてください。)

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k \\ &= {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1}\end{aligned}$$

とりあえずシグマの中身を書き出したら上記のようになったけど、2項定理を使うんだなということを頭にいれて ${}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1}$ を見てみます。

さっき ${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = 2^n$ といったけど、 ${}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1}$ だと少し足りないよね？

もし、 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n$ と赤色の部分があったのなら、 2^n とすることができるよね？でも、勝手に赤の部分足したらダメだから足した分引いたらいいんじゃない？

2項定理に限らず、公式を使うために足したり引いたりする作業はよく出てきます。覚えておいてください。それでは、解答に進みます。

【(3)の解答】

勝負が決まらない確率は、全体から勝者が出る確率を引けばいいので、(2)を考え求める確率は次のようになる。

$$1 - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} {}_n C_k$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} {}_n C_k$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n-1} {}_n C_k$$

$$= {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_{n-1}$$

$$= \left\{ {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_{n-1} + {}_n C_n \right\} - {}_n C_0 - {}_n C_n$$

$$= 2^n - 1 - 1 \quad \blacktriangleleft \quad {}_n C_0 = 1, {}_n C_n = 1 \text{ より}$$

$$= 2^n - 2$$

よって、

$$1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} {}_n C_k$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2)$$

$$= 1 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{3^{n-1} - 2^n + 2}{3^{n-1}} \quad \blacktriangleleft \text{これが答え}$$

【(4) の解説】

今回の期待値は $\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} {}_n C_k$ です。この問題もシグマの計算は2項定理を使って求めていきます。それでは、解答に進みます。

【(4) の解答】

求める期待値を $E(X)$ とする。

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot {}_n C_k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k {}_n C_k \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} n {}_{n-1} C_{k-1} \quad (\because (2)) \quad \blacktriangleleft \text{(注) を見よ} \\
&= n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} {}_{n-1} C_{k-1} \\
&= n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} ({}_{n-1} C_0 + {}_{n-1} C_1 + \cdots + {}_{n-1} C_{n-2}) \quad \blacktriangleleft \text{シグマの中身を具体的に書き出した} \\
&= n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left\{ ({}_{n-1} C_0 + {}_{n-1} C_1 + \cdots + {}_{n-1} C_{n-2} + {}_{n-1} C_{n-1}) - {}_{n-1} C_{n-1} \right\} \quad \blacktriangleleft \text{2項定理を使える形にした} \\
&= n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^{n-1} - 1) \quad \blacktriangleleft {}_{n-1} C_0 + {}_{n-1} C_1 + \cdots + {}_{n-1} C_{n-2} + {}_{n-1} C_{n-1} = 2^{n-1} \text{ より。これが答え}
\end{aligned}$$

上記の (注) の部分の式変形が思いつかなかったという人もいると思います。

ですが、これは受験生なら気づけないといけません。受験問題は、前問の結果を使って解いていくことが多いです。特に、(1) のように式変形を証明せよという問題があるのなら、確実に以降の問題で使います。

もし、使わなかったのなら、この問題は確率や期待値を求めることが目的なのにそんな設問自体あることがおかしいよね？

受験問題では、前問の結果を使うということは頻出ですので、すぐに気づけるようになっておいてください。

これで、今回の問題は終わりです。どうだったでしょうか？受験問題としてはごくごく標準的ではありますが、受験問題に慣れていない人にとっては難しかったかもしれません。しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com