問題

C_1, C_2 をそれぞれ方程式 $y = x^2$, $y = b(x-a)^2+3a$ で表される曲線とし、l は C_1 の接線でその傾きが 2 であるとする。ただし、a, b は実数で $b \neq 0$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) l を表す方程式を求めよ

(2) l が C_2 に接しているとき、b を a の式で表せ

(3) l が C_2 に接し、$a=3$ のとき、l, C_1, C_2 の概形を描き、それらで囲まれる図形の面積を求めよ。

お茶の水女子大学の２００８年の文系学部の過去問です。

「放物線」「接線」「面積」といった数学 II の微分積分の本当に典型的な問題です。お茶の水女子大学の入試問題としては簡単なものですが、まだ受験を経験していない人にとってはそれほど簡単な問題ではないと思います。

重要な問題なので、しっかりと理解しておいてください。

【(1) の解説】
これは、単に接線を求める問題なので簡単です。

【(1) の解答】

$y = x^2$

$y' = 2x$

$y = x^2$ の $x = t$ における接線の傾きは $2t$ となる。傾きが 2 となるので、$2t = 2$ より $t = 1$ となる。よって、求める接点の x 座標は 1 となる。以上より、求める接線は

$y - 1 = 2(x-1)$

$y = 2x - 1$ ◀ これが答え

【(2) の解説】
これは単に判別式を使うだけの問題です。それでは解答に進みます。

【(2) の解答】

$b(x-a)^2+3a=2x-1$

$bx^2-2abx+a^2b+3a=2x-1$

$bx^2-(2+2ab)x+a^2b+3a+1=0$

ここで、$bx^2-(2+2ab)x+a^2b+3a+1=0$ の判別式を D とすると

$$
\begin{aligned}
D/4=(1+ab)^2-b(ab^2+3a+1)&=0\\
a^2b^2+2ab+1-a^2b^2-3ab-b&=0\\
-ab-b+1&=0\\
(a+1)b&=1\\
b&=\frac{1}{a+1}\quad(a\fallingdotseq -1)
\end{aligned}
$$

(注)$a=-1$ のとき、$(a+1)b=1$ は左辺が 0 となり、等号が成立することはない、よって $a\fallingdotseq -1$ とした

【(3)の解説】
少し計算が難しいけど、普通に計算をするだけです。放物線 $f(x)$ と接線 $g(x)$ の計算は $f(x)-g(x)=a(x-t)^2$ の形に必ずなってくれます。これを利用して積分の計算をした方が計算量が減って楽になります。

【(3)の解答】
まず $y=2x-1$ と $y=\frac{1}{4}(x-3)^2+9$ との交点を求める。

$\frac{1}{4}(x-3)^2+9=2x-1$

$\frac{1}{4}(x-3)^2+9-2x+1=0$

$\frac{1}{4}\left\{(x-3)^2+36-8x+4\right\}=0$

$\frac{1}{4}(x^2-6x+9+40-8x)=0$

$\frac{1}{4}(x^2-14x+49)=0$

$\frac{1}{4}(x-7)^2=0$

$\therefore\ x=7$

⇑交点を求めるだけなら、両辺に 4 をかけて分数を払ったほうが楽だが、面積を求める時、もう一度この計算が必要になるのであえて分数を残したまま計算をした

次に、$y=x^2$ と $y=\frac{1}{4}(x-3)^2+9$ との交点を求める。

$$x^2 = \frac{1}{4}(x-3)^2 + 9$$

$$4x^2 = (x-3)^2 + 36$$

$$4x^2 = x^2 - 6x + 9 + 36$$

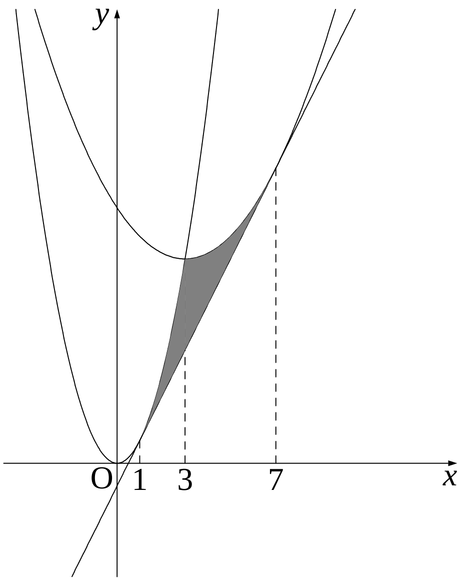
$$3x^2 + 6x - 45 = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x+5)(x-3) = 0$$

$$x = 3,\ -5$$

以上より、図示すると次のようになる。



求める面積を S とすると、$S = \displaystyle\int_1^3 \left\{x^2 - (2x-1)\right\} dx + \int_3^7 \left\{\frac{1}{4}(x-3)^2 + 9 - (2x-1)\right\} dx$

となる。

ここで、

$$\int_1^3 \left\{x^2-(2x-1)\right\}dx$$
$$=\int_1^3 (x^2-2x+1)\,dx$$
$$=\int_1^3 (x-1)^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^3$$
$$=\frac{1}{3}\left\{(3-1)^3-(1-1)^3\right\}$$
$$=\frac{8}{3}$$

$$\int_3^7 \left\{\frac{1}{4}(x-3)^2+9-(2x-1)\right\}dx$$
$$=\int_3^7 \frac{1}{4}(x-7)^2\,dx$$ ◀ 先ほどの交点を求める式より
$$=\left[\frac{1}{12}(x-7)^3\right]_3^7$$
$$=\frac{1}{12}\left\{(7-7)^3-(3-7)^3\right\}$$
$$=\frac{1}{12}4^3$$
$$=\frac{16}{3}$$

よって、
$$S=\int_1^3 \left\{x^2-(2x-1)\right\}dx+\int_3^7 \left\{\frac{1}{4}(x-3)^2+9-(2x-1)\right\}dx$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{16}{3}$$
$$=8$$ ◀ これが答え

今回の問題はどうだったでしょうか。今回は、文系でしたが理系の問題でも数学 II の微分積分が出題されることは意外に多いです。理系の人もしっかりと勉強をしておくようにしてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com