問題

関数 $y = \sin x$ のグラフ上に３点 $P(x_1, \sin x_1)$, $Q(x_2, \sin x_2)$, $(0 < x_1 < x_2 < \pi)$ と $R(\pi, 0)$ を取る。原点を O とし、四角形 $OPQR$ の面積を S とする。

(1) 方程式 $x\cos x + \sin x = 0$ は $0 < x < \pi$ の範囲で解を１つだけもつことを示せ。

(2) (1) で得られた解を a とおき、Q を $(a, \sin a)$ に固定し、点 P を動かす。このとき S が最大となる x_1 とその最大値 S_0 を a を用いて表せ。

2008 年の北海道大学の過去問です。数学 III の微分に関する問題です。(2) は、面積の最大値を求める問題です。

四角形の面積で、対角線を引くと右下の部分の面積が一定で、面積が変わるのは左上の部分の三角形だけです。面積の最大値、最小値の問題で今回のように一部が一定となるのは、比較的よく出てきます。知らなかったら思いつきにくいので、こういった手法もあるということを覚えておくようにしてください。

【(1) の解説】
単に微分をするだけの問題かな？と思って微分をする人が多いと思います。

ちなみに $f(x) = 0$ が $a < x < b$ で解を１個だけもつというのは、$f(a) < 0$ かつ $f(b) > 0$ で $y = f(x)$ が区間で単調増加つまり $f'(x) > 0$、もしくは $f(a) > 0$ かつ $f(b) < 0$ で $y = f(x)$ が区間で単調減少つまり $f'(x) < 0$ で証明することが多いです。

上記は、あきらかに成立するっていうのは理解できるよね。今回もこれにあてはまるのかな？と思い、とりあえず $f(x) = x\cos x + \sin x$ とでもして解いていきます。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\cos x + \sin x \\
f'(x) &= \cos x - x\sin x + \cos x \\
&= 2\cos x - x\sin x
\end{aligned}
$$

とりあえず微分をしてみたけど、うまくいきそうにない ⋯ ２階微分をしてみてもうまくいかない ⋯ 第一 $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi\cos\pi + \sin\pi = -\pi$ なんだから、単調増加や単調減少なら $f(x) = 0$ は解をもたない！

これは、違うなということで何か違う解法はないかな？と考えます。$x\cos x + \sin x = 0$ の両辺を $\cos x$ で割るとうまくいきます。

こうすることで、$x\cos x + \sin x = 0$ は $x + \dfrac{\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow x + \tan x = 0$ となります。これだったら、考えやすいよね。

「こんなの気づかないよ」という人もいるかもしれないですけど、「気づいてね」というしかないんです。気づき方としては $x\cos x+\sin x=0$ をそのまま考えてもうまくいかなかった、そこで「他にうまい解法があるはず」そう考えたら思いつけるかな？と思います。

と言いますか、この $\tan x$ に変える手法はたまに出てくるので覚えておいてください。それでは、解答に進みます。

【解答】

$x\cos x+\sin x=0\cdots(*)$

$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $(*)$ は成立しないので、$(*)$ の両辺を $\cos x$ で割ると

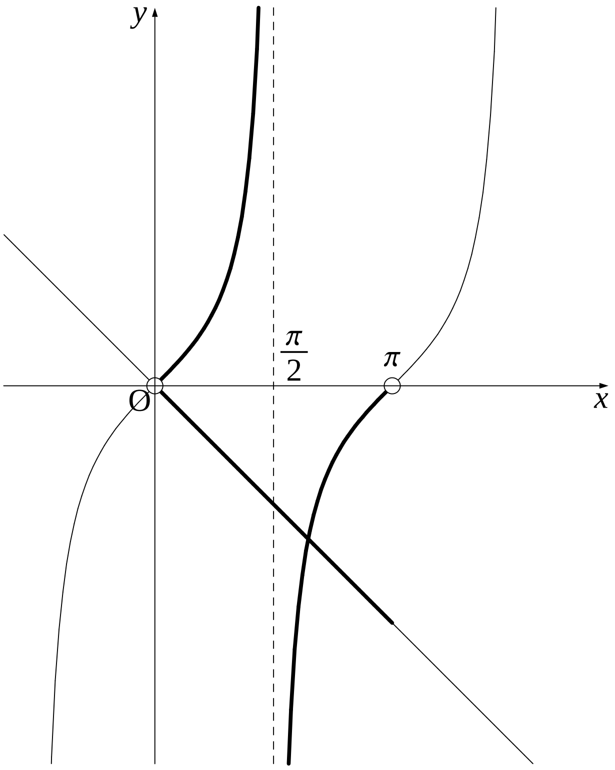
(注) 両辺を変数で割るときは、その変数が 0 になる可能性があるかどうかということを必ず確認をする。今回は $\cos x$っていう変数で割るけど、$0<x<\pi$ の範囲で $\cos x$ が 0 になるのは $x=\dfrac{\pi}{2}$ のときのみ、$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき不成立なので、両辺を $\cos x$ で割ってもよい。

これは、頭の中で確認をするだけでなく答案にも必ず書くこと

$$
\begin{aligned}
&x\cos x+\sin x=0\\
\Leftrightarrow\ &x+\frac{\sin x}{\cos x}=0\\
\Leftrightarrow\ &x+\tan x=0\\
\Leftrightarrow\ &\tan x=-x
\end{aligned}
$$

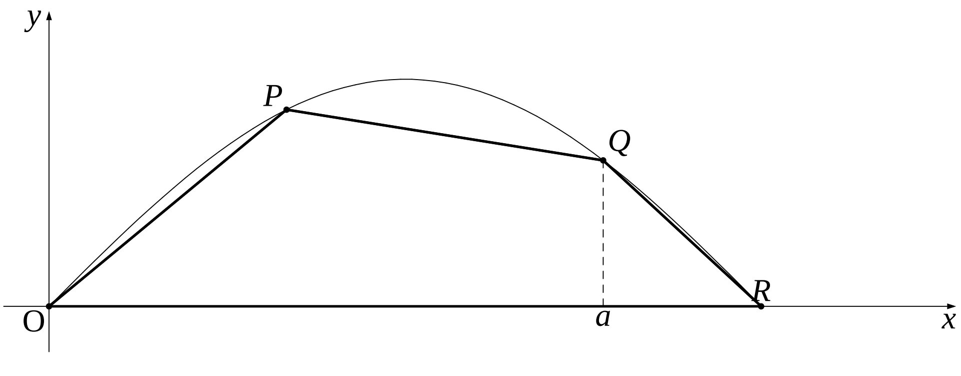
$\Uparrow$ $(*)$ が解をひとつもつとき、$y=\tan x$ と $y=-x$ が交点をひとつもてばよい。別に $x=-\tan x$ として $y=x$ と $y=-\tan x$ としてもいいけど、こっちの方が少し考えにくいかな？と思うので、$y=\tan x$ と $y=-x$ にした

$(*)$ の解の個数は、$y=-x$ と $y=\tan x$ の交点の個数と一致する。



グラフより、$y = -x$ と $y = -\tan x$ は $0 < x < \pi$ の範囲で交点をひとつもつ。以上より、$(*)$ のは $0 < x < \pi$ に解をひとつもつ。

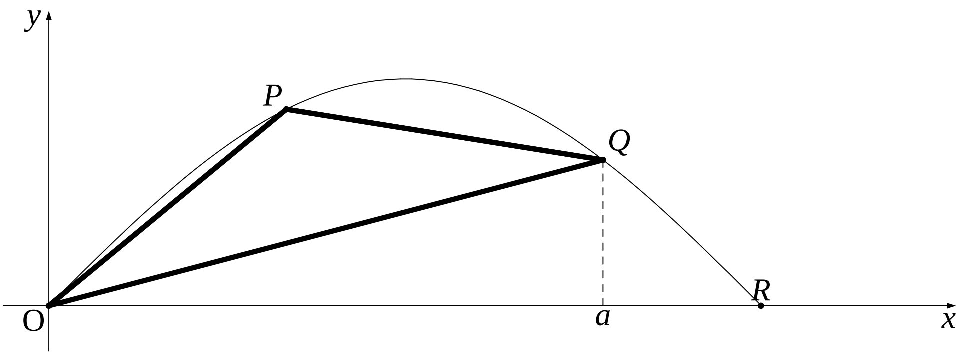
【(2) の解説】



とりあえず上の四角形の面積の最大値を求めるんだけど、今回動くのは点 P だけだよね。他の点は動かない。四角形 $OPQR$ の面積は三角形 OPQ の面積と三角形 OQR の面積を加えたものだけど、O, Q, R は動かないので当然三角形 OQR の面積は不変。面積が変わるのは、三角形 OPQ だけ！ということは、四角形 $OPQR$ の面積が最大となるのは三角形 OPQ の面積が最大となるときです。

⇑ この考えはよく出題されます。今回の問題では、まだ分かりやすいパターンでしたが分かりにくいときもあります。

とにかくこういった問題が出題されたときは、どこか面積一定の区間はないか？ということを考えるようにしておいてください。

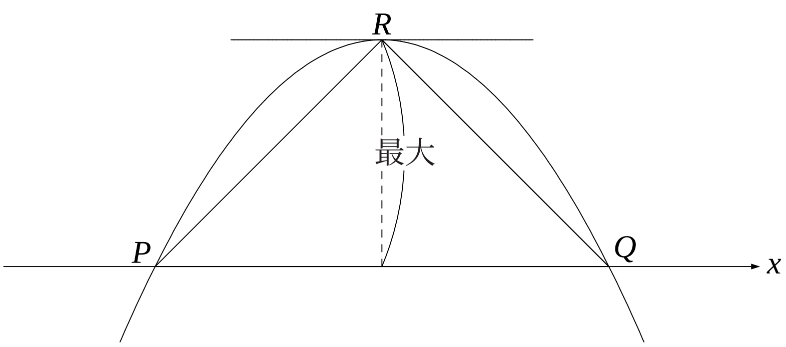


ここからは、△OPQ の面積が最大になるときを求めたらいいんですけど、どういったときに最大となることは分かるかな？

△OPQ の各頂点のうち O と Q は定点で、動くのは P だけなんだよね。OQ を底辺とみなしたとき、高さが最大となるような P の位置を考えたらいいことになるよね。

このときの動点 P はどこにくるか分かるかな？実は、P における接線の傾きが OQ と平行になるときです。

これは分かる人にとってはすぐに分かると思うけどピンとこない人もいると思います。なぜ平行になるとき最大となるか簡単に説明をしたいと思います。



今回の問題はなぜ考えにくいかと言うと PQ が傾いているからだよね。だから、例えばな

んだけど上図のように P, Q が x 軸上にあり、動点 R が P から Q の間を動くときの △PQR の最大値を求めてみることにするよ。

このとき、△PQR の底辺は一定なんだから、高さが最大となるときに三角形の面積は最大となります。で、最大となるのはどういうときかと言うと、上図のように R における接線の傾きが 0 になったときだよね。これは底辺と平行です。

これで分かったと思うけど、高さが最大となるのは接線の傾きが底辺の傾きと等しくなるときです。

では、ここから実際に接線の傾きが平行となるときを考えていきたいと思います。

Q の座標は $(a, \sin a)$ なので、直線 OQ の傾きは $\dfrac{\sin a}{a}$ となります。

また、$y = \sin x$ を微分したら $y' = \cos x$ なので P における接線の傾きは $\cos x_1$ となります。

よって、P における接線の傾きと直線 OQ の傾きが等しくなるのは $\cos x_1 = \dfrac{\sin a}{a}$ となるときです。また a は (1) より $a\cos a + \sin a = 0$ を満たす点であることを考えて、$\cos x_1 = \dfrac{\sin a}{a}$ は $\cos x_1 = -\cos a$ となります。後は、この方程式を解けば終わりです。この方程式ですが、$\cos\bigcirc = \cos\triangle$ と直す方法もありますが、$\cos x_1 = -\cos a$ を $\cos x_1 + \cos a = 0$ と直して、和積の公式を使って解いていくことにします。

和積の公式より、$\cos x_1 + \cos a = 2\cos\dfrac{x_1 + a}{2}\cos\dfrac{x_1 - a}{2}$ となります。次に、x_1 と a の値の範囲を考えます。

$$0 < x_1 < \pi$$
$$0 < a < \pi$$

$$0 < x_1 + a < 2\pi$$
$$0 < \frac{x_1 + a}{2} < \pi \blacktriangleleft \frac{x_1 + a}{2} \text{ の値の範囲が求まった}$$

$$-\pi < x_1 - a < \pi$$
$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x - a}{2} < \frac{\pi}{2} \blacktriangleleft \frac{x_1 - a}{2} \text{ の値の範囲が求まった}$$

$2\cos\dfrac{x_1+a}{2}\cos\dfrac{x_1-a}{2}=0$ となるのは、$\cos\dfrac{x_1+a}{2}=0$ または $\cos\dfrac{x_1-a}{2}=0$ となるときですが、先ほど求めた範囲より $\cos\dfrac{x_1-a}{2}=0$ となることはなく、$\cos\dfrac{x_1+a}{2}=0$ となるのは $\dfrac{x_1+a}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ のときに限られます。

ここまで来たら P の座標も求まるので、それを代入して解いていくだけです。それでは、解答に進みます。

【解答】
△OQR の面積は一定なので、四角形 $OPQR$ の面積が最大となるのは、△OPQ の面積が最大となるときである。

△OPQ の面積が最大となるのは、P における $y=\sin x$ の接線の傾きが直線 OQ の傾きに等しいときなので、$\cos x_1=\dfrac{\sin a}{a}$

また、(1) より $a\cos a+\sin a=0$ より、$\cos x_1=\dfrac{\sin a}{a}$ は $\cos x_1=-\cos a$ となる。

$\cos x_1+\cos a=2\cos\dfrac{x_1+a}{2}\cos\dfrac{x_1-a}{2}$

$0<x_1<\pi$

$0<a<\pi$

$0<x_1+a<2\pi$

$0<\dfrac{x_1+a}{2}<\pi$ ◀ $\dfrac{x_1+a}{2}$ の値の範囲が求まった

$-\pi<x_1-a<\pi$

$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x-a}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ ◀ $\dfrac{x_1-a}{2}$ の値の範囲が求まった

を考え、$\cos x_1+\cos a=0$ となるのは、$\dfrac{x_1+a}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ つまり $x_1=\pi-a$ のとき

$\sin(\pi-a)=\sin a$ となるので P の座標は $(\pi-1,\ a)$ となる。

このとき四角形 $OPQR$ は $QP\ /\!/\ OR$ の台形となるので

(四角形 $OPQR$ の面積) $= \dfrac{1}{2}\left\{\{a-(\pi-a)\}+\pi\right\}\sin a$ ◀ 台形の面積は(上底＋下底)×(高さ)÷2 より

$= a\sin a$ ◀ これが答え

今回の問題はこの類の問題としては簡単だったので気付きやすかったと思いますが、面積の最大値や最小値を求めるとき、その図形の一部が一定となることがよくあります。

この考えは受験にも頻出ですので、しっかりと覚えておいてください。それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com