

問題

$$\log_2(1 + |2 - x|) - 3 \log_8 \frac{1}{1 + |x|} = 2 \text{ を満たす実数 } x \text{ をすべて求めよ。}$$

2009 年の和歌山大学の過去問で、対数の方程式に絶対値が含まれたタイプの問題です。

国公立大学の問題としてはごくごく基本的なものなので、高校 2 年生でも数学の好きな人にとっては難なく解けるレベルだと思います。ぜひともチャレンジしてみてください。

【解説】

$\log_2(1 + |2 - x|) - 3 \log_8 \frac{1}{1 + |x|} = 2$ ですが、対数の方程式では問題を解く前に、何よりもまず真数条件を考えないといけません。

真数条件とは、絶対覚えておかないといけない内容ですが、 $\log_a b$ で表されたとき、 b のことを真数(しんすう)といい、真数 b は $b > 0$ という条件があります。

今回の真数は、 $1 + |2 - x|$ と $1 + |x|$ ですが、絶対値は大きさを表すので絶対に正になるということを考えると $1 + |2 - x| > 0$ 、 $1 + |x|$ はすべての x において成立します。

↑今回の問題では真数条件はすべての x なので、真数条件を考えなくても同じ結果になりますが、このことを答案に書いておかないと減点されます。

で、ここからどう解くのかな? と思いますが \log の方程式の問題では $\log_a \bigcirc = \log_c \Delta$ とすることができたら、 \log が外れて $\bigcirc = \Delta$ とすることができるので、まずは $\log_a \bigcirc = \log_c \Delta$ とすることを目的とします。

ここからは、十分解ける内容だと思いますので解答に進みます。

【解答】

すべての x において $1 + |2 - x| > 0$ 、 $1 + |x| > 0$ となるので、真数は正となる。

$$\log_2(1 + |2 - x|) - 3 \log_8 \frac{1}{1 + |x|} = 2 \dots (*)$$

ここで、まず $3 \log_8 \frac{1}{1 + |x|}$ を計算する。

↑わざわざばらして計算をすることもないかもしれないが、少し長いのでまずは $3 \log_8 \frac{1}{1 + |x|}$

のみを計算することにした

$$\begin{aligned} & 3 \log_8 \frac{1}{1+|x|} \\ &= 3(\log_8 1 - \log_8(1+|x|)) \leftarrow \log \text{の公式 } \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \text{ より} \\ &= -3 \log_8(1+|x|) \leftarrow \log_8 1 = 0 \text{ より} \\ &= -3 \frac{\log_2(1+|x|)}{\log_2 8} \leftarrow \text{底の変換公式を使って、底を2にした} \\ &= -3 \frac{\log_2(1+|x|)}{3} \leftarrow \log_2 8 = \log_2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \text{ より} \\ &= -\log_2(1+|x|) \end{aligned}$$

よって、(*)は

$$\begin{aligned} \log_2(1+|2-x|) + \log_2(1+|x|) &= \log_2 4 \leftarrow 2 = \log_2 4 \text{ より} \\ \log_2(1+|2-x|)(1+|x|) &= \log_2 4 \leftarrow \log_a \bigcirc = \log_c \triangle \text{の形になった} \\ (1+|2-x|)(1+|x|) &= 4 \\ (1+|x-2|)(1+|x|) &= 4 \end{aligned}$$

↑ $|2-x|$ より $|x-2|$ の方が考えやすいので、このように変形をした。

なぜ、このような変形ができるか分からない人もたまにいるけど、 $|A| = |-A|$ は当然言えるよね？ $2-x = -(2-x)$ より、 $|2-x| = |x-2|$ だということが確認できると思います。

ここからは、絶対値を外して計算をするだけです。絶対値を外し方が分からないという人は<http://www.hmg-gen.com/tecni1a-11.pdf>のプリントに詳しく説明しています。

(i) $x < 0$ のとき

$$(1 + |x - 2|)(1 + |x|) = 4$$

$$(1 - x + 2)(1 - x) = 4 \quad \blacktriangleleft x - 2 < 0, x < 0 \text{ を考え絶対値を外した}$$

$$(3 - x)(1 - x) = 4$$

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 + 1}$$

$$= 2 \pm \sqrt{5}$$

$$x < 0 \text{ より、} x = 2 - \sqrt{5}$$

(ii) $0 \leq x < 2$ のとき

$$(1 + |x - 2|)(1 + |x|) = 4$$

$$(1 - x + 2)(1 + x) = 4 \quad \blacktriangleleft x - 2 < 0, x > 0 \text{ を考え絶対値を外した}$$

$$(3 - x)(1 + x) = 4$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

これは、 $0 \leq x < 2$ を満たす。

(iii) $2 \leq x$ のとき

$$(1 + |x - 2|)(1 + |x|) = 4$$

$$(1 + x - 2)(1 + x) = 4 \quad \blacktriangleleft x - 2 > 0, x > 0 \text{ を考え絶対値を外した}$$

$$(x - 1)(x + 1) = 4$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

$$x \geq 2 \text{ より、} x = \sqrt{5}$$

以上より、 $x = 2 - \sqrt{5}, 1, \sqrt{5}$ ◀これが答え

どうだったでしょうか？少し式変形が面倒でしたけど丁寧に考えていけば、確実に解ける問題です。国公立大学でさえ、こういった基本的な問題が出題されることもあります。まずは、確実に基本的な問題を解けるようになっておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com