

問題

p を素数とする。 x, y に関する方程式

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$$

を満たす正の整数の組 (x, y) をすべて求めよ。

【解説】

お茶の水女子大学の整数問題です。お茶の水女子大学レベルとしては、ごくごく簡単なレベルの問題です。

ですが、整数問題は学校でしっかりと勉強をしないというところも多く、難しく感じた人もいます。

今回は、方程式の整数問題といった問題です。こういった問題では、((文字を含んだ) 整数)×((文字を含んだ整数))=((数のみの) 整数) と式変形するのがポイントです。

なぜかという、例えば m, n が整数とします。 $mn = 3$ を満たすものは、 m, n が整数でなければ無数にありますが、整数同士かけあわせて 3 となるのは $(1, 3), (3, 1)$ くらいしかありません。両方とも負の数のもありますが、それでも数ははしれています。

このように、整数同士掛け合わせて整数となる数はたかだか知れています。ですから、こういった方程式の整数問題は、(整数)×(整数)=(整数) の形に強引に式変形をしていくことが多いです。もちろん、方程式の整数問題だからといって、全ての問題で「(整数)×(整数)=(整数)」とする訳ではありませんが、このようにする可能性が高いです。

「(整数)×(整数)=(整数)」の形にするといっても、どのように式変形をしたらいいかよく分からない人もいます。強引に共通因数を作って「(整数)×(整数)=(整数)」の形にします。以下のように、式変形をします。

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$$

$py + px = xy$ ◀ 両辺に pxy をかけて分数を払った

$$xy - px - py = 0$$

$$(y - p)x - py = 0$$

とりあえず、ここまで式変形ができました。ここから、どうしようかな? と考えるのですが、 $(y - p)x - py$ の左側の項は $(y - p)$ を因数にもっています。

これが積の形にするには、右側にも強引に $(y - p)$ の因数をもってもらいたいです。で、どうするかと言えば $-py = -p(y - p) - p^2$ と式変形をします。なぜこのように式変形をできるのか、すぐに分かる人も多いと思うけど、もし分からない人は右辺の $-p(y - p) - p^2$ を展開して整理すると、左辺の $-py$ と一致しているということから理解できると思います。

$$(y - p)x - py = 0$$

$$(y - p)x - p(y - p) - p^2 = 0 \quad \leftarrow -py = -p(y - p) - p^2 \text{ より}$$

$$(y - p)x - p(y - p) = p^2$$

$$(x - p)(y - p) = p^2 \quad \leftarrow \text{「(整数)×(整数)=(整数)」の形になった！}$$

で、ここからは整数同士かけあわせて p^2 となる数字を探していきます。 p がただの整数だと考えられませんが、今回は p は素数という条件があるので比較的簡単です。

素数とは、「1とその数以外約数がない1より大きい整数」です。このことを考えて掛け合わせて p^2 となるような2つの整数は $(1, p^2), (p, p), (p^2, 1), (-1, -p^2), (-p, -p), (-p^2, -1)$ の6通りしかありません。

この6通りしかないというのは、よく考えれば分かると思います。もし、分からない人は $p = 3$ とでもして掛け合わせて 3^2 となる数字を考えると分かると思います。 ← 文字でよく分からない時は、今回のようにごくごく簡単な数字を入れて確かに成立しているということを確認するという事は多いです。

文字では分かりにくいけど、数字だと分かりやすいので、文字で考えるのが苦手と言う人は覚えておいて欲しい手法です。

で、ここからなんですけど今回は (x, y) は自然数です。

$(x - p, y - p) = (-1, -p^2)$ のときは、 $x = -1 + p, y = p - p^2$ となります。 p は素数で、素数は1以上の正の数です。ということは、 $p < p^2$ が成立します。したがって、 $p - p^2 < 0$ となり負の数になってしまいます。 x, y はともに自然数、つまりは1以上の整数なので当然負の数となることはありません。よって、この場合、不適です。

また、 $(x - p, y - p) = (-p, -p)$ も $(x, y) = (0, 0)$ となります。これも x, y は自然数という条件を満たさないなので、不適となります。それでは、解答に進みます。

【解答】

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$$

$$py + px = xy$$

$$xy - px - py = 0$$

$$x(y - p) - p(y - p) = p^2$$

$$(x - p)(y - p) = p^2$$

よって、

$$(x - p, y - p) = (1, p^2), (p, p), (p^2, 1), (-1, -p^2), (-p, -p), (-p^2, -1)$$

$$(x, y) = (1 + p, p^2 + p), (2p, 2p), (p^2 + p, 1 + p), (-1 + p, p - p^2), (0, 0), (p - p^2, -1 + p)$$

ところで p は素数より $p > 1$ を満たす。よって $p - p^2 < 0$ となる。このことと x, y は自然数ということを踏まえ、 $(x, y) = (-1 + p, p - p^2), (0, 0), (p - p^2, -1 + p)$ は不適。

以上より、 $(x, y) = (1 + p, p^2 + p), (2p, 2p), (p^2 + p, 1 + p)$ となる。

今回の問題はどうかだったでしょうか？整数問題としては、ごくごく簡単な問題ですが、知らなかった人にとっては難しかったと思います。整数問題は、出る大学には本当によく出題され、出ない大学はほとんど出題されません。自分の受けたい大学の過去問を見て、整数問題がよく出題されるようなら勉強しておいて方がいいと思います。それでは、頑張ってください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com