問題

正の整数 n に対し n の正の約数すべての和を $\sigma(n)$ とおく。ただし、1 と n も n の約数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 素数 p、正の整数 a に対し、$n = p^a$ とおく。$\sigma(n)$ を p と a で表せ。

(2) 相異なる素数 p, q、正の整数 a, b に対し、$n = p^a$, $m = q^b$ とおく。このとき、

$$\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$$

が成立することを証明せよ。

(3) 正の整数 a について $2^a - 1$ が素数とする。このとき、$n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ とおくと、

$$\sigma(n) = 2n$$

が成立することを証明せよ。

【解説】
お茶の水女子大学の文系学部の２００９年の過去問です。一見ややこしそうですが、本当に初歩的な問題です。

この問題は、次の性質を使うだけです。

約数

$N = a^p b^q c^r \cdots$ と素因数分解できるとき

N の約数の個数は、$(p+1)(q+1)(r+1)\cdots$ となる。

N の約数の総和は、$(a^0 + a^1 + \cdots + a^n)(b^0 + b^1 + \cdots + b^n)(c^0 + c^1 + \cdots + c^n)\cdots$ となる。

それでは、問題に進みたいと思います。

＊(1)
これは、単に先ほどの約数の公式を使うだけです。

【解答】
p が素数、a が正の約数であるので

$\sigma(n) = p^0 + p^1 + \cdots + p^a$

$$= \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}$$

$\Uparrow$ $p^0 + p^1 + \cdots + p^a$ は、初項 $p^0 = 1$, 公比 p, 項数 $a + 1$ 個の等比数列の和。p は素数ということから、$p \neq 1$ が言える。

もし p が 1 になる可能性があるんだったら、場合分けが必要だよね。等比数列の和は、公比が 1 か 1 以外かで場合分けが必要です。

たまに、素数に 1 が入るか曖昧な人いますけど、素数とは「1 とその数自身以外に正の約数がない、1 より大きな自然数」なので、1 は素数になりませんよ。忘れやすいので覚えておいてください。

＊(2)
これも、先ほどの約数の総和の公式を使うだけです。

【解答】
$\sigma(nm) = \sigma(n)\,\sigma(m)$ を示す。

$nm = p^a q^b$ となるが、p, q は相異なる素数であることと、また a, b は正の整数なので nm を素因数分解した形が $nm = p^a q^b$ となる。よって、$\sigma(nm)$ を求めると

$\sigma(nm) = (p^0 + p^1 + \cdots + p^a)(q^0 + q^1 + \cdots + q^b) \cdots ①$ となる。

次に、$\sigma(n) = p^0 + p^1 + \cdots + p^a$ と $\sigma(m) = q^0 + q^1 + \cdots + q^b$ となるので、
$\sigma(n)\,\sigma(m) = (p^0 + p^1 + \cdots + p^a)(q^0 + q^1 + \cdots + q^b) \cdots ②$

①, ② より、
$\sigma(nm) = \sigma(n)\,\sigma(m)_{//}$

＊(3)
これも、簡単です。約数の公式と式変形を丁寧にしていくだけです。

【解答】
$n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ で、a は正の整数であるが、$2^a - 1$ が素数であることから $a \neq 1$
もし、$a = 1$ なら $2^a - 1 = 1$ となり、$2^a - 1$ が素数である条件に反してしまう

a は $a \neq 1$ の整数なので 2^{a-1} は偶数 ⇐ a が正の整数のとき、2^{a-1} は $a = 1$ のときのみ奇数でそれ以外のときは偶数となる。

また、$2^a - 1$ は奇数であり素数であるので

$n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ は n を素因数分解したものである。⇐ 素因数分解したものなので、最初に話した約数の公式を使える

$$
\begin{aligned}
\sigma(n) &= (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{a-1})\{(2^a - 1)^0 + (2^a - 1)^1\} \\
&= \frac{2^a - 1}{2 - 1} \cdot 2^a \\
&= 2^a(2^a - 1) \\
&= 2 \cdot 2^{a-1}(2^a - 1) \quad \blacktriangleleft \text{答えの式と一致させるために } 2^a = 2 \cdot 2^{a-1} \text{ と式変形をした} \\
&= 2n \quad (\because\ n = 2^{a-1}(2^a - 1))
\end{aligned}
$$

以上より、$\sigma(n) = 2n$ が成立する。

これで、今回の問題は終わりです。最初にも話しましたが、一見難しそうですがごくごく簡単な問題です。

見た目だけで判断せずに、実際に自分の頭で考えるようにしておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com