問題

aを実数とし、$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+ax-9$とする。曲線$y=f(x)$と$x$軸が異なる２点で交わり、それらの$x$座標がともに４以上５以下となる$a$の範囲を求めよ。

【解説】
和歌山大学の２００４年の入試問題の過去問です。

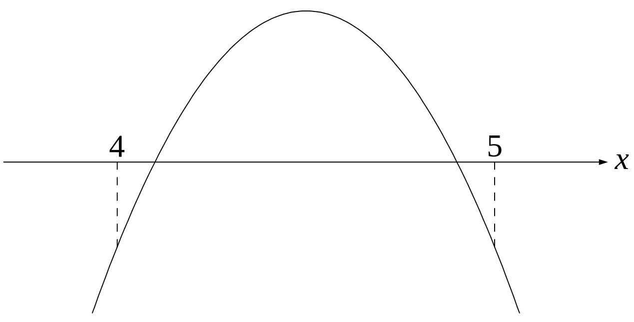
「２次関数の解の配置」という問題で、入試問題としてはごくごく簡単なものです。

解の配置に関する問題は、「判・軸・端に着目」というのが基本的な考え方です。

判とは、判別式の判です。軸とは、軸の位置のことです。端とは、変わり目のことで今回の問題なら４以上５以下となるので、変わり目は$x=4$と$x=5$です。この変わり目のy座標の正負で考えます。

解の配置の問題は、難しいと思っている人もいるかもしれませんが、上記の「判・軸・端」を考えて、あとはこれらからできた式を連立不等式で解けばいいだけなので、慣れてくるとワンパターンで解けてしまうので本当に簡単です。この解の配置に関する問題は、センター試験でも頻出なのでしっかりと理解しておいてください。

【問題の解説】
まず、今回の２次関数は$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+ax-9$なので上に凸な２次関数だよね。上に凸な２次関数が４以上、５以下に異なる２解をもつときは、以下のようになります。



上記のようになれば、$f(x)=0$は、$4 \leqq x \leqq 5$に異なる２解をもってくれます。こうなる時の、「判・軸・端」を考えていきます。

「判」は２点で交わるので当然 $D > 0$ です。

次に、軸の位置ですが、軸は４から５の間にないと上図のようになることはないので、軸の位置は４から５の間にあります。軸の位置を知りたいので $f(x)$ を平方完成することにします。

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + ax - 9 \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2ax) - 9 \\ &= -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{a^2}{2} - 9 \end{aligned}$$

よって、軸の位置は $x = a$ と分かります。これが４から５の間にあればいいので $4 < a < 5$ です。イコールが入るかどうかということを丁寧に考えないといけませんが、今回はイコールが入ることはありません。

例えば、$x = 4$ のとき解をもつとしても $x = 4$ で重解となり、ということは問題文の「異なる２解」ということに反するからです。

最後に「端」です。これは、変わり目のことですが今回は問題文の「４以上５以下」という表現に着目して、$f(4)$ と $f(5)$ の正負に着目して解いていきます。

$f(4)$ や $f(5)$ は、図形のようになるので $f(4) \leqq 0,\ f(5) \leqq 0$ が必要になります。今回もイコールが入るかどうかは、しっかりと考える必要がありますが、「４以上５以下」というように以上以下はそのものも含んでＯＫなのでイコールを含みます。

以上の「判・軸・端」で求めた不等式を連立して解いていけば答えが求まります。それでは、解答に進みます。

【解答】

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + ax - 9 \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2ax) - 9 \\ &= -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{a^2}{2} - 9 \end{aligned}$$

$f(x)=0$ が 4 以上 5 以上の異なる 2 解をもてばよい。

条件を満たすには、

(i) $\dfrac{a^2}{2}-9>0$ ⇐ 別に $D>0$ でもよいが、平方完成をして頂点を求めたのでこっちの方がラク。上に凸な 2 次関数の頂点が 0 より大きいとき、放物線は x 軸と 2 点で交わってくれます。つまりは $D>0$ と同じです。

(ii) $4<a<5$ ◀ 軸が 4 と 5 の間にある

(iii) $f(4)\leqq 0$

(iv) $f(5)\leqq 0$

上記の 4 つが成立すればよい

(i) より

$$\frac{a^2}{2}-9>0$$

$$a^2-18>0$$

$$(a+3\sqrt{2})(a-3\sqrt{2})>0$$

$$a<-3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}<a$$

(ii) より

$$4<a<5$$

(iii) より

$$f(4)=-\frac{1}{2}\cdot 4^2+4a-9\leqq 0$$

$$4a-17\leqq 0$$

$$a\leqq\frac{17}{4}$$

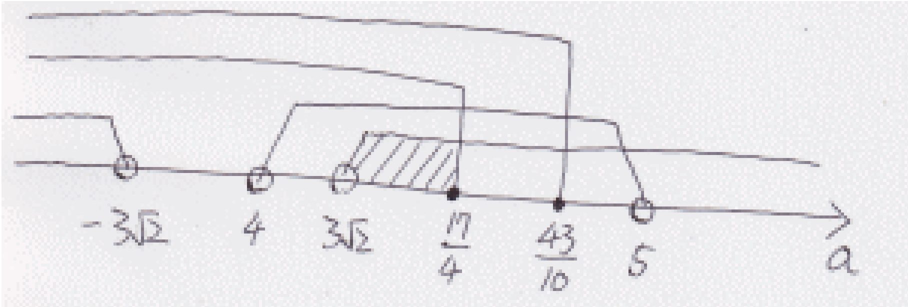
(iv) より

$$f(5)=-\frac{1}{2}\cdot 5^2+5a-9\leqq 0$$

$$-25+10a-18\leqq 0$$

$$10a\leqq 43$$

$$a\leqq\frac{43}{10}$$



⇑ $3\sqrt{2}, \frac{14}{4}, \frac{43}{10}$ などの大小関係が少し難しいが、$\sqrt{2} = 1.41$ を入れて計算をすると $3\sqrt{2} = 4.23, \frac{14}{4} = 4.25, \frac{43}{10} = 4.3$ なので大小関係が分かります

以上より、求める範囲は $3\sqrt{2} < a \leqq \frac{17}{4}$ となる。

今回の問題はどうだったでしょうか？入試問題としては、ごくごく基本的な問題ですが１年生や２年生にとっては少し難しかったかもしれません。少し計算が複雑でしたが、やることとしてはごくごく基本的なことです。

今回の問題もそうですが、入試問題といっても、やることは普段の学校の勉強とたいして変わらないことが多いです。難しいことを勉強するのではなく、まずは基本的なことを徹底的に理解していってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com