問題

$f(x)=\sin^3 x$ とする。

(1) $f'(0)$ および $f'(2\pi)$ を求めよ

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ を求めよ

(3) $p(x)$ を x の２次方程式とするとき、$\displaystyle\int_0^{2\pi} p(x)\,f''(x)\,dx=0$ を示せ。

【解説】
筑波大学の２００４年の過去問で、積分計算の問題です。問題としては、ごくごく標準的な問題なので、筑波大レベルを考えている人はぜひとも解けないといけない問題です。

それでは、問題に進んでいきたいと思います。

＊ (1)
【解説】
これは、単に微分をするだけの問題です。

【解答】

$f(x)=\sin^3 x$

$f'(x)=3\sin^2 x\,(\sin x)'$ ◀ 微分の公式 $(f(x)^n)'=n(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$ より

$\quad\quad=3\sin^2 x\cos x$

$f'(0)=3\sin^2 0\cos 0$

$\quad\quad=0$

$f'(2\pi)=3\sin^2 2\pi\cos 2\pi$

$\quad\quad=0$

＊ (2)
【解説】
意外に知らない人が多いですけど、まずは次の事柄を覚えてください。

特殊基本関数

$$\int (f(x))^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1}$$

なんで、こんなことが言えるの？と思った人もいると思います。そういった人は右辺を微分してみてください。そうすれば、確かに成立しているなということを確認できると思いますよ。一応、右辺を微分してみたいと思います。

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1}\right)' \\
&= \frac{1}{n+1}(n+1)\,(f(x))^n \cdot f'(x) \\
&= (f(x))^n \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

上記より、右辺を微分したら左辺の積分の中身と同じになっています。微分、積分の関係を考えると特殊基本関数の公式が成立しているということが分かると思います。

実は、「**積分の入試問題で、部分積分が必要となることは驚くほど少ないです (実際に具体的な値を計算で求める場合です)。多くの場合、よく見てみると特殊基本関数になっていることが多いです。ですから、積の形の積分を見たら、まずは特殊基本関数でないか？と考えるようにしてください。特殊基本関数でなければ、部分積分や置換積分を考えることにします**」

今回の問題は本当に頻出タイプですが、次のように解くと特殊基本関数になります。置換積分をする人もいるとは思いますが、置換積分は積分区間を考えたりしないといけないので、少し面倒です。

【解答】

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \sin^3 x\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin^2\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \sin x\,(1-\cos^2 x)\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin x - \sin x \cos^2 x\right)\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin x - (-\cos x)' \cos^2 x\right)\,dx
\end{aligned}$$

⇑ $(-\cos x)' = \sin x$ より。特殊基本関数が使える形になるように強引に式変形をしていく

$$=\int_0^{2\pi}\left(\sin x+(\cos x)'\cos^2 x\right)dx$$

$$=\left[-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{2\pi}$$

$$=-1+\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}$$

$$=0$$

＊ (3)

【解説】

$p(x)$ は 2 次関数と書いてあるので、$p(x)=ax^2+bx+c$ などとおいて、$f''(x)$ も求めて $\int_0^{2\pi} p(x)f''(x)\,dx$ を計算していくのかな？なんて思う人もいると思います。

でも、やってみたら分かると思うけど、この計算はあまりに面倒です。**受験問題で、単に面倒なだけの問題は出題されることは少ないです。ですから、あまりに面倒なときは、何か他にもっと簡単な解法があるな**ということに気づけないといけません。

そこで、どうしようかな？と考えるんだけど $\int_0^{2\pi} p(x)f''(x)\,dx$ は積の形をしているので、部分積分って使えるよね。

部分積分ってどっちを積分していいか分からないという人がたまにいます。どういうふうに考えるかというと「簡単になる方」です。

「簡単になる方」なんて言われても分かりにくいと思います。$p(x)$ は 2 次関数だけど、$p'(x)$ は 1 次関数だよね。**数学っていうのは、次数が低ければ低いほど考えやすい**のでとりあえず、$p(x)$ を微分していく方向で、部分積分をしてみたいと思います。

$$\int_0^{2\pi} p(x)f''(x)\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi} p(x)\{f'(x)\}'\,dx$$

$$=\left[p(x)f'(x)\right]_0^{2\pi}-\int_0 p'(x)f'(x)\,dx$$ ◀ 部分積分をした

とりあえず部分積分をしたらここまできました。で、ここからなんですけど、まずは左側の項 $\left[p(x)f'(x)\right]_0^{2\pi}$ ですが、$\left[p(x)f'(x)\right]_0^{2\pi}=p(2\pi)f'(2\pi)-p(0)f'(0)$ となりますが、(1)

より $f'(0)=0,\ f'(2\pi)=0$ より $\Big[p(x)\,f'(x)\Big]_0^{2\pi}=0$ となります。

ちなみに、**数学って前問の結果を使っていくことが多い**です。今回の問題は、(1) の結果を使ったよね。少し、逆説的ですが**前問の結果を使っているということは、この解法であっている可能性が高い**です。

少し問題とそれてしまいますけど、数学ってとにかくうまくいけそうな解法で解いていきます。とりあえず思いついた解法の中で一番可能性の高そうなものからどんどんと解いていきます。

その解き方で解けたらＯＫですし、解けなければまた別の解法を考えます。ですから、解いている途中にこの解法であっているということが分かれば嬉しいです。

そのひとつの指標が、「前問の結果を使っている」ということです。数学では、前問の結果を使うことが多いです。間違った解法で解いているとき、前問の結果を使えるなんてことはほとんどありません。ですから、前問の結果が使えるような形になったら、「ああ、この解法であってるんだな」と思ってもらってかまいません。少し、話がそれました。それでは、問題に戻ります。

$$\Big[p(x)\,f'(x)\Big]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}p'(x)\,f'(x)\,dx$$

$$=-\int_0^{2\pi}p'(x)\,f'(x)\,dx \blacktriangleleft \Big[p(x)\,f'(x)\Big]_0^{2\pi}=0\text{ より}$$

ここからもう一度、部分積分をします。

$$=-\int_0^{2\pi}(f(x))'\,p'(x)\,dx$$

$$=-\Big[f(x)\cdot p'(x)\Big]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}f(x)\,p''(x)\,dx$$

$$=-f(2\pi)\,p'(2\pi)+f(0)\,p'(0)+\int_0^{2\pi}f(x)\,p''(x)\,dx$$

部分積分をしていけば、ここまできました。ここから $f(x)=\sin^3 x$ より $f(0)=f(2\pi)=0$ ということが言えます。

後は、$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\,p''(x)\,dx$ を考えればいいんですけど、$p''(x)$ は定数っていうことは分か

る？$p(x)$ は２次関数でした。２次関数を２階微分したら当然定数。定数なので、インテグラルの外に出すことができます。

$\int_0^{2\pi} f(x)\, p''(x)\, dx = p''(x)\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$ となりますが、(2) より $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0$ です。

これで、導くことができました。解説では、少したらたらと説明が長くなってしまいましたが、やっていることは本当に簡単ですよ。それでは、解答に進みたいと思います。

【解答】

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_0^{2\pi} p(x)\, f''(x)\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} p(x)\, \{f'(x)\}'\, dx \\
&= \Big[p(x)\, f'(x) \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} p'(x)\, f'(x)\, dx \\
&= p(2\pi)\, f'(2\pi) - p(0)\, f'(0) - \int_0^{2\pi} p'(x)\, f'(x)\, dx \\
&= -\int_0^{2\pi} p'(x)\, f'(x)\, dx \ \ (\because\ f'(0) = 0,\ f'(2\pi) = 0) \\
&= -\Big[f(x) \cdot p'(x) \Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f(x)\, p''(x)\, dx \\
&= -f(2\pi)\, p'(2\pi) + f(0)\, p'(0) + \int_0^{2\pi} f(x)\, p''(x)\, dx \\
&= p''(x) \int_0^{2\pi} f(x)\, dx \ \ (\because\ f(2\pi) = f(0) = 0,\ p(x)\ \text{は２次関数より}\ p''(x)\ \text{は定数}) \\
&= 0 \ \ (\because \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0) \\
&= (\text{右辺})_{//}
\end{aligned}
$$

これで、今回の解説は終わりです。気づけた人にとっては簡単だったと思います。でも、気付けなかった人にとっては少し難しかったかもしれません。

「**数学の問題であまりにも面倒なことをさせるわけがない**」このことを頭にいれておくだけでもずいぶんと違ってきますよ。

それでは、がんばってください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com