問題

a を１以上の実数、b を正の実数とする。

(1) 0 以上のすべての実数 x について、不等式 $e^x - a(x+2b) \geqq 0$ が成り立つための、a, b の満たすべき条件を求めよ。ただし、e は自然対数の底とする。

(2) a, b が (1) で求めた範囲を動くとき、定積分 $\dfrac{1}{ae^b}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x+2b}\,dx$ の値を最小にする a, b と、その最小値を求めよ。

【解説】
２００４年の北海道大学の過去問です。難易度としては、それほど難しいわけではありませんが、(２) は「１文字を固定して考える」という考えが必要になりますし、計算も複雑です。北海道大学の問題の中でも難しめの問題です。それでは、問題に進みます。

(＊) (1)
【解説】
これは、簡単な問題です。0 以上のすべての実数 x で、$e^x - a(x+2b) \geqq 0$ が成り立つには、$f(x) = e^x - a(x+2b)$ とでもして $f(x)$ の最小値が 0 以上であるという方法で証明します。

【解答】
$f(x) = e^x - a(x+2b)$ とする。

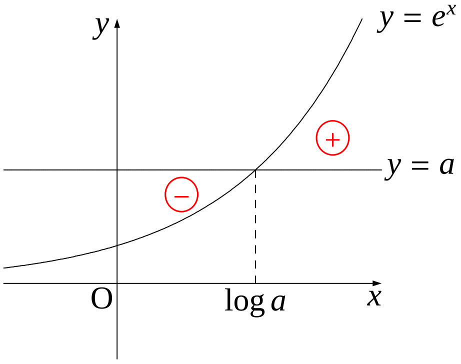
$$f(x) = e^x - a(x+2b)$$
$$f'(x) = e^x - a$$

(注) これから $f'(x) = e^x - a$ の正負を調べていきます。このくらいなら別にグラフをかく必要はないかもしれないですけど、今後のことも踏まえてグラフをかきます。

微分は正負を知ることが目的です。その正負って複雑なものになればなかなか判断ができなくなります。そういったときは、$f'(x) = g(x) - h(x)$ の形になおします。

それで、$g(x)$ と $h(x)$ の２つのグラフを同じところにかいて、$g(x)$ の方が $h(x)$ より上側にあるところでは $g(x) > h(x)$ つまり $g(x) - h(x) > 0$ となるので $f'(x) > 0$ となります。

反対に $g(x)$ の方が $h(x)$ よりも下側にある範囲では $g(x) < h(x)$ より $g(x) - h(x) < 0$ となるので、$f'(x) > 0$ となります。



$f'(x) = e^x - a$ は $y = e^x$ のグラフの方が $y = a$ のグラフより上側にあるところで $f'(x) > 0$、反対に下側にあるところでは $f'(x) < 0$

上図のようになるので $0 < x < \log a$ で $f'(x) < 0, \log a < x$ で $f'(x) > 0$ となります。

このようにグラフをかくことで、$f'(x)$ の正負は視覚的に判断できるので数式で考えるよりも楽になります。

先ほども言いましたが、今回の問題くらいでは数式で考えても楽に考えられると思いますが、難しくなるとこのグラフの考え方を理解しておかないと解けない問題も出てきます。

重要な考えなので、しっかりと理解しておいてください。

x	0		$\log a$	
$f'(X)$		$-$	0	
$f(X)$		↘	$f(\log a)$	↗

$x \geqq 0$ で増減表を書くと上記のようになる。よって、$x = \log a$ で $y = f(x)$ は極小かつ最小となる。

$f(\log a) = a - a(\log a + 2b)$

$f(x)$ が 0 以上のすべての x で $f(x) \geqq 0$ が成立するには、$f(x)$ の最小値が 0 以上であればよい。

$a - a(\log a + 2b) \geqq 0$ ここで、$a > 0$ より両辺を a で割ると $1 - \log a - 2b \geqq 0$ となる。

(＊) (2)

【解説】

$\frac{1}{ae^b}\int_0^1 \frac{1}{x+2b}\,dx$ の値を … という問題だが、まず $\int_0^1 \frac{1}{x+2b}\,dx$ の計算ができるので、とりあえずこの定積分の計算をしておきます。

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2b}\,dx$$
$$=\int_0^1 \frac{(x+2b)'}{x+2b}\,dx$$
$$=\Big[\log(x+2b)\Big]_0^1 \quad ◀ \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)| \text{ より}$$
$$=\log(1+2b)-\log(2b)$$

とりあえず、このように定積分の計算ができたので、

$\frac{1}{ae^b}\int_0^1 \frac{1}{x+2b}\,dx=\frac{1}{ae^b}(\log(1+2b)-\log(2b))$ というふうにすることができました。

ここからの求め方がポイントなんです。

今回の問題は変数が a, b の２つあります。**２変数関数の最大値、最小値問題は変数を１つにしてから解いていく**というのが基本です。

そこで、変数を１つにできるかな？と探していくんですけど、ちょっとできそうにない。

なぜかというと、例えば $a+b=1$ なんかという関係式があれば $b=1-a$ などとして代入することによって１変数にすることができます。でも、今回の問題では a と b の等式が与えられていない！よって、この変形はできない …

そこで、２変数を１変数にする手法は同次式なんかも考えられるけど、どうもできそうにない …

同次式について知りたい人は、以下のページを見てください。

http://www.hmg-gen.com/situmon/tsuugaku12/12-2.html

他にも、何種類か２変数を１変数にする手法はあるかもしれないけど、今回の問題は２変数を１変数にすることは無理なんです。ですから、２変数のまま解いていかないといけません。

２変数関数の最大値、最小値問題では１文字を固定して考えるというのがよく使われる手法です。少し難しいので、問題を解きながら説明をしていきます。

先ほどの定積分の計算で、与式は $\dfrac{1}{ae^b}(\log(1+2b)-\log(2b))$ と変形をすることができました。

ここから、１文字固定の考えを使っていくのですが、１文字固定とは簡単に言うと、どちらかの文字を定数とみなすことです。２変数関数は、変数が２つあるから考えにくいんです。でも、１文字固定して、一方の文字を定数と考えると２変数関数は１変数関数とみることができるよね？

今回は、変数が a, b のふたつがあります。どちらの文字を固定するかをまず考えないといけませんが a を固定して、b のみの式と考えると、$\dfrac{1}{ae^b}(\log(1+2b)-\log(2b))$ は考えにくいです。

で、b を固定して、a のみの式とすると $\dfrac{1}{ae^b}(\log(1+2b)-\log(2b))$ は簡単な関数です。

(注) 上記では理解しにくいという人もいると思います。どういうことを言っているかというと、x の関数とすると $f(x)=\dfrac{1}{ae^x}(\log(1+2x)-\log(2x))$ と $f(x)=\dfrac{1}{xe^b}(\log(1+2b)-\log(2b))$ のどっちのグラフの方が考えやすいですか？ということです。

明らかに後の $f(x)=\dfrac{1}{xe^b}(\log(1+2b)-\log(2b))$ の方が考えやすいよね？これは b を固定して a を変数とみなした式です

$f(a)=\dfrac{1}{e^b}(\log(1+2b)-\log(2b))\cdot\dfrac{1}{a}$ となります。で、これがどんなグラフになるかというと $b>0$ という条件があるので $\dfrac{1}{e^b}(\log(1+2b)-\log(2b))>0$ です。ということは、$f(a)$ は $y=\dfrac{1}{a}$ と似たような関数になり $a>0$ では、単調減少な関数になります。

問題文に与えられた条件と、(1) で求めた結果により $a \geqq 1, \log a \leqq 1-2b$ という関係式があります。これを a について整理すると $1 \leqq a \leqq e^{1-2b}$ になります。⇐ b は定数という

ことに注意して下さい

さっき言った $f(a)$ が単調減少ということをあわせると、$f(a)$ は $x = e^{1-2b}$ のとき最小となります。

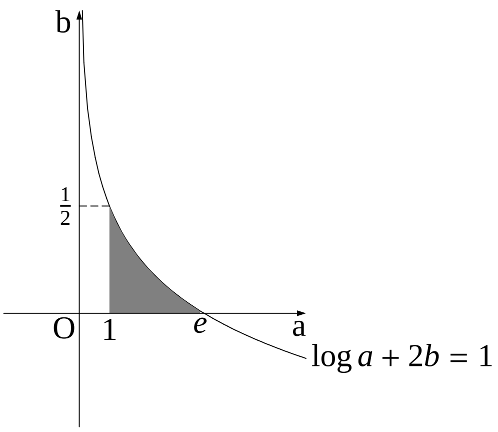
$$
\begin{aligned}
f(e^{1-2b}) &= \frac{1}{e^{1-2b}\,e^{b}} \log \frac{2b+1}{2b} \\
&= e^{b-1} \log \frac{2b+1}{2b}
\end{aligned}
$$

上記のようになります。これで、与式が b のみの関数となりました。後は、b を変数として $e^{b-1} \log \dfrac{2b+1}{2b}$ の最小値を求めれば問題終了です。

で、ここからまず b の値の範囲を求めておきたいと思います。問題文に b は正の実数とあるので $b > 0$ は当然言えます。後 $a \geqq 1$ というのも与えられています。

(1)で、$1 - \log a - 2b \geqq 0$ となりました。これを b について解くと $b \leqq \dfrac{1 - \log a}{2}$ です。

$b > 0$ かつ $a \geqq 1$ かつ $1 - \log a - 2b \geqq 0$ を図示すると、次のようになります。



上図より、b の値の範囲は $0 < b \leqq \dfrac{1}{2}$ となります。

後は、この範囲における $e^{b-1} \log \dfrac{2b+1}{2b}$ の最小値を求めれば、問題は終了です。ここからは、計算が少しややこしいですが単に微分をするだけの問題です。

それでは、解答に進みます。

【解答】

$\dfrac{1}{ae^b}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x+2b}\,dx$ の最小値を求める。

ここで、

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2b}\,dx$$
$$=\int_0^1 \frac{(x+2b)'}{x+2b}\,dx$$
$$=\Big[\log(x+2b)\Big]_0^1$$ ◀ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|$ より
$$=\log(1+2b)-\log(2b)$$

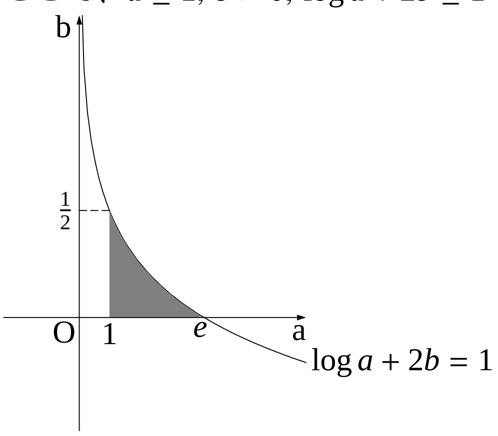
よって、与式は $\dfrac{1}{ae^b}(\log(1+2b)-\log(2b))$ となる。

b を固定して考えると $a \geqq 1,\ b>0,\ 1-\log a-2b \geqq 0$ より、$1 \leqq a \leqq e^{1-2b}$ となる。

ここで、$g(a)=\dfrac{1}{ae^b}\log\dfrac{2b+1}{2b}$ とする。$b>0$ より $\dfrac{1}{e^b}\log\dfrac{2b+1}{2b}>0$ より $a>0$ で $g(a)$ は単調減少。よって、$g(a)$ は $a=e^{1-2b}$ で最小となる。

$$\begin{aligned} f(e^{1-2b}) &= \frac{1}{e^{1-2b}\cdot e^b}\log\frac{2b+1}{2b} \\ &= \frac{1}{e^{1-b}}\log\frac{2b+1}{2b} \\ &= e^{b-1}\Big\{\log(2b+1)-\log(2b)\Big\} \end{aligned}$$

ここで、$a \geqq 1,\ b>0,\ \log a+2b \leqq 1$ を図示すると



上図より、$0<b \leqq \dfrac{1}{2}$ となる。

$g(b) = e^{b-1}\left\{\log(2b+1) - \log(2b)\right\}$ とする。

$$g'(b) = e^{b-1}\left\{\log(2b+1) - \log(2b)\right\} + e^{b-1}\left(\frac{2}{2b+1} - \frac{2}{2b}\right)$$
$$= e^{b-1}\left\{\log(2b+1) - \log(2b) + \frac{2}{2b+1} - \frac{1}{b}\right\}$$

ここで $e^{b-1} > 0$ より、$g'(b)$ の正負は $\log(2b+1) - \log(2b) + \dfrac{2}{2b+1} - \dfrac{1}{b}$ の正負と一致する。

以下、$h(b) = \log(2b+1) - \log(2b) + \dfrac{2}{2b+1} - \dfrac{1}{b}$ として、$h(b)$ の正負を考える

(注) 微分するのは正負を知りたいだけ。だから、微分をして正負に影響しないものはどんどん外して考えていきます。

今回は 1 階微分では正負を判断できません。そういったときはもう一度微分をします。絶対とは言いませんが、そういった場合単調増加や単調減少になっている場合が多いです。

$$h(b) = \log(2b+1) - \log(2b) + \frac{2}{2b+1} - \frac{1}{b}$$
$$h'(b) = \frac{2}{2b+1} - \frac{2}{2b} - \frac{4}{(2b+1)^2} + \frac{1}{b^2}$$
$$= \frac{-2b^2+3b+1}{(2b+1)^2b^2}$$

ここで、$-2b^2+3b+1 = -2\left(b - \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{17}{8}$ より $0 \leqq b \leqq \dfrac{1}{2}$ より、$-2b^2+3b+1$ は $0 \leqq b \leqq \dfrac{1}{2}$ で単調減少なので $b = \dfrac{1}{2}$ のとき最小となる。

$-2b^2+3b+1$ に $b = \dfrac{1}{2}$ を代入すると $-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\dfrac{1}{2} + 1 = 1$ より $0 \leqq b \leqq \dfrac{1}{2}$ において、$-2b^2+3b+1 > 0$ が言える。

よって、$h'(b) = \dfrac{-2b^2+3b+1}{(2b+1)^2b^2} > 0$ より $h(b)$ は単調増加。$h(b)$ は $b = \dfrac{1}{2}$ のとき最大となる。

$h\left(\frac{1}{2}\right) = \log(1+1) - \log 1 + \frac{2}{2} - 2 = \log 2 - 1 < 0$ より、$0 < b \leqq \frac{1}{2}$ で常に $g'(b) < 0$。よって、$g(b)$ は単調減少。

$g(b)$ は $b = \frac{1}{2}$ のときに最小となる。このとき、$a = 1$ である。

このとき、最小となり、最小値は $g\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \log 2 = \frac{\log 2}{\sqrt{e}}$ である。

今回の問題はどうだったでしょうか？計算式自体はかなり複雑だったかもしれませんが、やっている事柄としてはごくごく簡単なものです。

この問題でポイントとなるのは、「１文字固定」です。知らない人も多いですが、よく出てくる手法なのでしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com